Министерство РФ по общему и среднему образованию
Уральский государственный технический университет

Ряды

Индивидуальное домашнее задание
по курсу "Высшая математика"
для студентов дневной формы обучения
всех специальностей

Екатеринбург
1999

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Уральский государственный технический университет

Р Я Д Ы

Методические указания к домашнему заданию по курсу "Высшая математика"
для студентов всех форм обучения
радиотехнических и физико-технических
специальностей

Екатеринбург 1998

УДК 517

Составители: А.Л.Крохин, М.В. Савельев

Научный редактор: доц., канд. физ.-мат. наук А.Л.Крохин

РЯДЫ: Методические указания к домашнему заданию по курсу "Высшая математика"/А.Л.Крохин,М.В.Савельев,Екатеринбург: УГТУ, 1998. 23 с.

Методические указания предназначены для использования при выполнении индивидуального домашнего задания "Ряды", предлагаемого студентам всех факультетов. В задание входят 25 вариантов по 12 задач каждый, охватывающих все основные темы соответствующего раздела программы. Данная работа содержит подробное решение одного из вариантов. Использование ее поможет студенту лучше понять какую учебную цель преследует каждая задача, какой именно теоретический материал отрабатывается. Он познакомится с некоторыми техническими приемами проведения доказательств и выкладок, которые не всегда удается разобрать на занятиях. В пособии приводится полезный иллюстративный материал, полученный с помощью ЭВМ, показывается как сам студент может использовать компьютер для более качественного решения задач и лучшего усвоения теоретического материала.

Библиогр.: 5 назв.Табл. 2. Прил. 1.

Подготовлено кафедрой "Вычислительные методы и уравнения математической физики.

Порядок оформления отчета по индивидуальному домашнему заданию

1. Отчет пишется в отдельной тетради или на стандартных листах бумаги, сшитых между собой. В последнем случае лист бумаги заполняется с одной стороны.

2. На первом листе пишется:

ОТЧЕТ

Индивидуальное домашнее задание по математике

Тема: Ряды

Группа Р - 2??

Студент Фамилия И.О.

3. На втором листе пишется:

Ответы:

N задачи по порядку N след.задачи и т.д.	Формула и/или числовое значение ответа	N страницы, на которой находится решение

Номера задач в колонку. Ответы максимально коротко. Если Вы не решили задачу - оставляете пустое место. После проверки знаком "+" будут отмечены зачтенные задачи, а знаком "-" незачтенные.

4. На следующих листах последовательно записывается условие каждой задачи, слово "Решение" и текст подробного решения задачи. Номер листа, на котором находится начало задачи, записывается как указано выше. Проверяться будут и числовые ответы и объяснения решения.

Текст условия задачи

РЕШЕНИЕ

Текст решения задачи

5. Не надо в своем отчете копировать эту работу. Обращайте внимание на цель каждого задания, какие теоретические знания используются для его выполнения, как выполняются доказательство и выкладки. При необходимости обращайтесь к конспекту лекций и учебникам, список которых приводится в конце.

Образцы задач и их решение

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 13}+\dots \qquad (1)$$

Вычислить частичные суммы S_{n} для n = 5, 10, 100. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_{n}, и относительную, δ_{n}, погрешности. Результаты занести в таблицу.

По определению суммой числового ряда называется предел последовательности частичных сумм (если, конечно, он существует)

$$\lim_{n\to\infty} S_{\text{n}} = S.$$

Для нахождения предела найдем выражение S_{n}, причем, в более общем случае ряда вида

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+3b)(a+4b)}+\dots \qquad (2)$$

Найдем его частичные суммы:

$$S_1=\frac{1}{a(a+b)}, S_2=\frac{2}{a(a+2b)}, S_3=\frac{3}{a(a+3b)},\dots, S_n=\frac{n}{a(a+nb)}. \qquad (3)$$

Перейдем к пределу и получим сумму ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{ab}. \qquad (4)$$

Используем полученный результат, учитывая, что заданный в условии ряд можно представить в виде суммы трех рядов типа (2) с параметрами

$$a_1=1, a_2=3, a_3=5$$

и

$$b_1=b_2=b_3=6$$

соответственно. Сумма ряда (1) получается суммированием их сумм (4). Частичные суммы ряда (1) , особенно для больших n, тоже удобнее вычислять по формуле (3) (только подумайте какие брать n).

Можно использовать и другой прием для нахождения суммы ряда (1). Общий член этого ряда a_{n} можно разложить на простейшие дроби

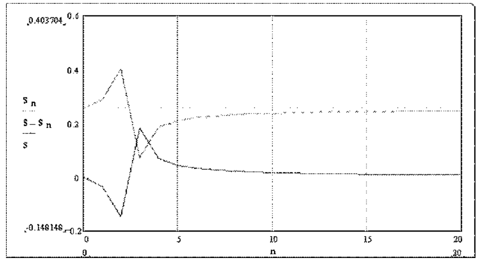


Рис. 1: График частичной суммы ряда, S_n, n - число слагаемых

$$a_{\text{n}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right).$$

Запишем теперь S_{n}, вернее $6S_{\text{n}}$:

$$6S_{\text{n}}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}\dots\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}$$

$$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}=1+\frac{1}{3}-+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}.$$

Теперь можно проводить вычисления и заносить результаты в таблицу.

n	S_n	Δ_n	δ_n
5	0.2(1)	0.0(4)	0.17
10	0.23(7)	0.0178	0.075
100	0.253888	0.0017	0.007
∞	$\frac{23}{90}=0.2(5)$	0	0

Заметим, что S_{n} для любого n представляет приближенное значение суммы S. Абсолютная погрешность равна, как известно,

$$\Delta_{\text{n}} = |\ S - S_{\text{n}}\ |.$$

В данном случае она связана с отбрасыванием бесконечного числа членов ряда и называется погрешностью ограничения . При непосредственном же вычислении S_{n} допускается еще одна погрешность - погрешность округления , связанная с потерей значащих цифр в промежуточных результатах (ведь любой компьютер имеет ограниченное число разрядов). Никогда не забывайте о ней! Ведь при выполнении цепочки арифметических действий погрешность накапливается . Поэтому вычислять S_{100} прямым суммированием не только долго, но и неэффективно из-за большой ошибки округления.

2) *Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:*

$$\text{а) } tg\frac{\pi}{4} + 2tg\frac{\pi}{8} + 3tg\frac{\pi}{16} + 4tg\frac{\pi}{32} + \ldots + ntg\ \frac{\pi}{2^{n+1}} + \ldots,$$

$$\text{б)} \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \ldots,$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{^2}}{2^n} + i\frac{\ln n}{n^2}.$$

Ряд а) содержит только положительные члены, т.к. $tgx > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Применим признак Даламбера

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)tg(\pi/2^{n+2})}{ntg(\pi/2^{n+1})} = \frac{1}{2} < 1.$$

Значит ряд сходится. Ряд б) - знакочередующийся, исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей, его общий член $a_n = 1/(2n-1)$ и он расходится (можно сравнить с гармоническим). Итак, абсолютной сходимости нет, перейдем к исследованию обычной сходимости.

Непосредственно применить признак сходимости Лейбница нельзя, т.к. нет монотонного убывания модулей членов ряда. Но Вы можете сначала рассмотреть подпоследовательность частичных сумм S_{2n} и убедиться в том , что она имеет предел.

$$S_{2n} = -2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(2k-1)(2k-3)}$$

Ведь это, умноженная на -2, частичная сумма сходящегося ряда. В последнем можно убедиться, применив интегральный признак сходимости

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)(2x-3)}$$

сходится, а значит, сходится и ряд .
Учтем, что $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, а $\lim a_n = 0$. Таким образом получаем, что исходный ряд сходится условно.

Ряд в) состоит из комплексных чисел. Такой ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды из действительных и мнимых частей. Сходимость первого доказывается с помощью признака Даламбера

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^n(n+1)^2}{n^2\ 2^{n+1}} = \lim \frac{(1+\frac{1}{n})}{2} = \frac{1}{2} < \ 1.$$

Заметим, что
$$\exp(\sqrt{x}) > x\ \forall x > 1 \Leftrightarrow \exp(\sqrt{x}) > \exp(\ln x) \Leftrightarrow \sqrt{x} > \ln x.$$
Применим это неравенство для оценки второго ряда.

$$\frac{\ln(n)}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Применяя признак сравнения , мы доказываем его сходимость, т.к. ряд с общим членом $n^{-3/2}$ сходится.

Итак, ряд в) сходится.

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(2n+3)2^n}.$$

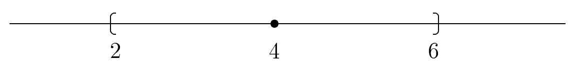
Вычислить его сумму с точностью $\epsilon_1 = 10^{-2}$ и $\epsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $4 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0,4}$, R - радиус сходимости.

Целью настоящего задания является исследование зависимости быстроты сходимости степенного ряда от положения точки в интервале сходимости. Для этого требуется, во-первых, вычислить значение его суммы в различных точках с заданной погрешностью, во-вторых, отметить сколько членов ряда необходимо было для этого просуммировать.

Для начала найдем радиус сходимости, воспользовавшись известной Вам из лекций формулой, основанной на признаке Даламбера.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ a_n\ |}{|\ a_{n+1}\ |} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ 2(n+1)+3)2^{n+1}\ |}{|\ (2n+3)2^n\ |} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+5)*2}{2n+3} = 2.$$

Центром интервала сходимости данного ряда является точка $x_0 = 4$.



Исследуем сходимость ряда на концах интервала. В точке $x = 2$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+3)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)}$. Этот ряд знакочередующийся, очевидно, что условия теоремы Лейбница выполняются. Действительно, $\lim a_n = 0$, а $\forall n \in \mathrm{N}\, a_{n+1} > a_n$, здесь a_n- модуль n-го члена ряда. Значит при $x = 2$ ряд сходится. В другой крайней точке, $x = 6$, ряд получается знакопостоянный $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)}$. Этот ряд имеет те же свойства сходимости, что и гармонический (признак сравнения !), а гармонический ряд расходится. Значит на правом конце интервала сходимости ряд расходится.

Займемся вычислением суммы ряда в заданных точках. Рекомендую для этой цели воспользоваться каким-либо вычислительным устройством, поскольку ручной счет был бы чрезвычайно трудоемким. Прежде чем составить программу счета необходимо подумать как остановить вычисление по достижении заданной погрешности ϵ.

Пусть в данной точке получается знакочередующийся ряд. Из теории нам известно одно важное свойство ряда Лейбница - его сумма не превышает по абсолютной величине модуля первого члена (а Вы гляньте-ка в учебник!). Остаток ряда Лейбница, т.е. то, что Вы отбрасываете при суммировании n членов ряда, также есть ряд Лейбница. Значит абсолютную погрешность можно оценить так:

$$| S - S_n | = | a_{n+1} - a_{n+2} + \dots | \leq | a_{n+1} | .$$

Поэтому продолжайте суммирование до тех пор, до такого n , пока не будет выполняться условие $| a_{n+1} | < \epsilon$. Если вычисления проводятся на программируемом калькуляторе или на компьютере, то ошибка округления будет намного меньше, чем заданная.

Оценку погрешности приближенного суммирования знакоположительного ряда сделать сложнее. Для этого обычно строят ряд сравнения, для которого подобную оценку сделать можно. Пусть остаток ряда обладает свойством : $\forall n > n_0\ a_{n+1} < a_n$. Тогда

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... = a_{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}}\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \dots\right)$$

$$< a_{n+1}\left(1 + \left(\tfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)^2 + \left(\tfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)^3 + \dots\right) = a_{n+1}\ \frac{1}{1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}$$

Пример программы вычисления суммы ряда, написанной на Pascal'е, приводится в Приложении. Вы можете, конечно , воспользоваться и ею, но гораздо интереснее написать свою. Особое внимание обратите на оформление печати результатов. Если Вам удастся сделать что-нибудь особенное - текст будет опубликован!

Таблица 2

Результаты вычислений суммы ряда в точках $4 \pm kR/5$. M - число членов, обеспечивающих заданную погрешность ϵ, S - вычисленное значение суммы, DS - абсолютная погрешность.

Точки		$\epsilon = 0.01$			$\epsilon = 0.0001$		
k	x	M	S	DS	M	S	DS
-4	2.400	8	0.234	0.008830	24	0.230	0.000093
-3	2.800	5	0.247	-0.005982	12	0.249	0.000081
-2	3.200	3	0.269	-0.007111	7	0.271	-0.000096
-1	3.600	2	0.299	0.005714	5	0.298	-0.000025
0	4.000	0	0.333	0.000000	0	0.333	0.000000
1	4.400	1	0.373	0.006767	4	0.380	0.000030
2	4.800	3	0.443	0.003518	7	0.447	0.000054
3	5.200	5	0.547	0.006610	13	0.553	0.000058
4	5.600	11	0.757	0.009974	29	0.767	0.000087

Обратите внимание, как увеличивается потребное для достижения заданной погрешности число членов по мере удаления от центра интервала сходимости. Причем сходимость у правого края хуже, чем у левого.

4) Разложить функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений. В данном случае необходимо воспользоваться рядом

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdots .$$

Для этого преобразуем $f(x)$ к виду

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 2x.$$

Использовано свойство функции $\operatorname{arctg}(x)$

$$\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y.$$

Окончательно получаем

$$f(x) = \operatorname{arctg} 2 - 2x + (2x)^3/3 - (2x)^5/5 + (2x)^7/7 - \dots$$

$$\text{или } f(x) = \operatorname{arctg} 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{2n+1}.$$

5) Разложить функцию $f(x) = (1-x)e^x$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$ и найти область сходимости полученного ряда.

Как и в предыдущем случае необходимо воспользоваться готовым разложением

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Предварительно преобразуем исходную функцию так, чтобы переменная x входила только в комбинации x - 1, поскольку именно по степеням этого выражения требуется построить разложение.

$$(1 - x)\, e^x = -(x - 1)e^{-1+x+1} = -(x - 1)e \cdot e^{x-1}$$

Тогда искомое разложение будет иметь вид:

$$f(x) = -e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n!}.$$

Радиус сходимости найдем так

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = \infty.$$

Ряд сходится на всей числовой оси.

6) Найти круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i+2)^n}{(4+3i)^{n-1}}.$$

Теорема Абеля справедлива для всех степенных рядов, в том числе и для рядов в комплексной области. Вспомним, что из нее следует. Существует такое $R > 0$, что при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится, а при $|z - z_0| > R$ расходится. На комплексной плоскости первому неравенству соответствует внутренняя часть круга радиуса R с центром в точке z_0 - *круга сходимости.* Радиус сходимости R лучше находить, пользуясь признаком сходимости Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z-i+2|^{n+1}\ \ |4+3i|^{n-1}}{|z-i+2|^n |4+3i|^n} = |z-i+2|\ \frac{1}{|4+3i|} < 1.$$

Ряд сходится, если $|z-i+2| < |4+3i| = 5$, т.е. $R = 5$, z_0=-2+i.

7) Доказать, что ζ - функция Римана непрерывна и дифференцируема в области $x > 1$.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{5}$$

Воспользуемся свойствами равномерно сходящихся рядов. Как известно, если ряд из производных сходится на некотором промежутке равномерно, а сам ряд сходится, причем члены ряда - непрерывные и дифференцируемые на этом промежутке функции, то и сумма ряда - непрерывна и дифференцируема на этом промежутке.

Составим ряд из производных членов ряда (5)

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = \frac{\ln(n^{-1})}{n^x}$$

Построим ряд сравнения

$$\frac{\ln(\frac{1}{n})}{n^x} < \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^x} = \frac{1}{n^{x+1/2}}, \text{ т.к. } \sqrt{x} > \ln x\ \forall x > 0.$$

Последний ряд при $x > 1$ мажорируется рядом с общим членом $n^{-3/2}$, который по интегральному признаку сходится. Итак, ряд из производных (5) равномерно сходится при $x > 1$, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом - признак Вейерштрасса. Сам ряд (5) сходится по крайней мере в одной точке $x = 1.5$. На основании теоремы о дифференцировании равномерно сходящихся рядов ζ - функция Римана дифференцируема при $x > 1$, а, значит и непрерывна.

Подробнее со свойствами ζ - функции можно познакомиться в [3].

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Найти $\mathbf{n} = 5$ членов ряда.

Использование степенных рядов дает один из мощных методов решения ДУ. Как Вам объясняли на лекции, возможны два подхода. Первый используется при решении данного задания, а второй - следующего.

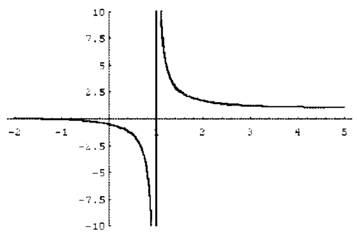


Рис. 2: График ζ - функции Римана.

Будем искать решение в виде ряда по степеням x, коэффициенты вычисляются по формуле Тейлора. Нам понадобятся значения производных искомой функции при $x_0 = 0$. Первую берем из начального условия, вторую - из ДУ. Остальные производные получаем последовательным дифференцированием y''.

$$y'' = -xy, \;\; y''' = -y - xy', \;\; y^{\text{iv}} = -2y' - xy'' \text{ и т.д.}$$

Часть производных обращается в нуль. Искомые пять ненулевых членов

$$y(x) = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{4x^6}{6!} - \frac{28x^9}{9!} + \frac{252x^{11}}{11!}.$$

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

Решение многих физических задач - по распространению тепла, электромагнитных волн, упругих колебаний - в системах, обладающих *цилиндрической* симметрией, приводит к дифференциальному уравнению Бесселя,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

ν-го порядка. Наличие цилиндрической симметрии попросту означает, что свойства рассматриваемой системы не изменяются при повороте на произвольный угол вокруг некоторой оси. Название довольно "прозрачное".

Кстати, и решения записанного уравнения часто называют *цилиндрическими функциями.* Для инженера и научного работника цилиндрические функции - функции Бесселя - не менее важны, чем, скажем, тригонометрические. Вот мы сейчас и познакомимся с такой функцией.

В отличие от решения предыдущей задачи используем другой метод. Аналитическое выражение искомой функции будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^\rho \sum_{\text{k}=0}^{\infty} a_{\text{k}} x^{\text{k}} \;.$$

Неизвестные величины a_{k} определим , подставляя y и производные в исходное уравнение

$$\sum_{\text{k}=0}^{\infty} a_{\text{k}} (k+\rho)^2 x^{\text{k}+\rho} + (x^2 - \nu^2) x^\rho \sum_{\text{k}=0}^{\infty} a_{\text{k}} x^{\text{k}} = 0,$$

и требуя равенства коэффициентов при одинаковых степенях x.

$$x^\rho \;\Leftrightarrow a_0(\rho^2 - \nu^2) = 0; \;\; x^{\rho+1} \Leftrightarrow a_1[(\rho+1)^2 - \nu^2] = 0 \text{ и т.д.}$$

Коэффициент a_0 можно считать произвольной постоянной, для ρ получаем $\rho = \nu$. Сначала рассмотрим решение с положительным ρ.

$$a_1 = 0; \;\; a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}; \ldots; a_{2m+1} = 0; \;\; a_{2m} = \frac{(-1)^{\text{m}} a_0}{2^{2\text{m}} m! (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)}.$$

Аналогично получается соотношение и при отрицательном ρ

$$a_{2\text{m}+1} = 0; a_{2\text{m}} = \frac{(-1)^{\text{m}} a_0}{2^{2\text{m}} m! (-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+m)}.$$

Вспомним, что, во-первых, нас интересует решение при $\nu = 1/2$, во-вторых, *ограниченное* решение. Если же взять $\rho = -1/2$, то при $x \to 0$ решение уравнения будет неограниченно возрастать. Итак, искомое ограниченное решение уравнения Бесселя, его обозначают $J_{\frac{1}{2}}(x)$, имеет вид

$$y = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{\text{m}=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1/2}}{2^{2m+1/2}\Gamma(m+{}^1/_2)m!}$$

Здесь было использовано общепринятое выражение для a_0:

$$a_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu+1)).$$

Γ - функция Эйлера, при $n \in \mathbf{N}$ $\Gamma(n+1) = n$ и $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

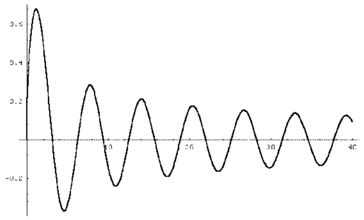


Рис. 3: График функции Бесселя, $J_{\frac{1}{2}}(x)$.

Можно записать и более понятное и наглядное выражение:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi x}}\ \sum \frac{(-1)^{m} 2^{m+1} x^{2m+1}}{m! 1 * 3 * ..(2m-1)(2m+1) 2^{2m+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi x}}\ \sum \frac{(-1)^{m} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{1}{\pi x}} \sin(x).$$

10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int\limits_{0.2}^{0.6} \frac{dx}{1+x^4}$$

с точностью $\epsilon_1 = 10^{-3}$ и $\epsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, взятых в частичную сумму на верхнем и на нижнем пределах интегрирования.

Для вычисления разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням x, используя формулу суммы геометрической прогрессии со знаменателем $q = -x^4$.

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \dots (-1)^{n} x^{4n} + \dots$$

Ряд сходится, причем равномерно, при $|x| \le r < 1$ (это доказывалось на лекции). Поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке

$[a, b] \in [-r, r]$.

$$\int_{0.2}^{0.6} \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{4n+1}}{4n+1}\Big|_{0.2}^{0.6}$$

Осталось вычислить сумму ряда на верхнем и на нижнем пределах с заданными допустимыми погрешностями.

Как уже отмечалось при решении третьего задания, по следствию из теоремы Лейбница о знакочередующемся ряде погрешность вычисления n-ой частичной суммы не превышает по модулю величины первого отброшенного члена.

На верхнем пределе ($x = 0.6$) требуем

$$\frac{0.6^{4n+1}}{4n+1} < 10^{-t} \Leftrightarrow 6^{4n+1} < (4n+1) 10^{4n+1-t}.$$

Для того, чтобы оценить значение n, при котором выполняется это условие, прологарифмируем неравенство. Получим

$$(4n+1)\lg 6 < 4n + 1 - t + \lg(4n+1) \Leftrightarrow (4n+1)(1-\lg 6) > t - \lg(4n+1).$$

Огрубим неравенство, потребовав, чтобы n удовлетворяло условию

$$(4n+1)(1-\lg 6) > t \Leftrightarrow 4n+1 > \frac{t}{(1-\lg 6)}.$$

При $\epsilon = 10^{-3}$ получим $n > 2$, значит первый отброшенный член имеет номер 3. Величина суммы получается $S_1(0.6) = 0.5856$. При $\epsilon = 10^{-6}$ $n > 5$ и сумма $S_2(0.6) = 0.5854762$. Заметим, что числа имеют "запасные" цифры. Дело в том, что нам еще предстоит находить разность значений на верхнем и нижнем пределах интегрирования. А, как известно, абсолютная погрешность суммы или разности не меньше суммы абсолютных погрешностей слагаемых. Поэтому при заданной погрешности 10^{-3} значения на верхнем и на нижнем пределах надо вычислять с "запасной" значащей цифрой.

На нижнем пределе ($x = 0.2$) аналогичная оценка показывает, что при $\epsilon = 10^{-3}$ значение суммы можно считать равным нулю. При $\epsilon = 10^{-6}$ достаточно ограничиться одним первым слагаемым. Сказанное можно проиллюстрировать точными значениями членов ряда.

Таблица 3.

Значения членов ряда на верхнем и нижнем пределах

k	$x = 0.2$	x=0.6
1	$-6.4 \cdot 10^{-5}$	-0.0155552
2	$5.688888889 \cdot 10^{-8}$	0.001119744
3	$-6.30153846 \cdot 10^{-11}$	$-1.0046688 \cdot 10^{-4}$
4	$7.710117645 \cdot 10^{-14}$	$9.9568584497 \cdot 10^{-6}$
5	0	$-1.044616697 \cdot 10^{-6}$
6	0	$1.1372115221 \cdot 10^{-7}$

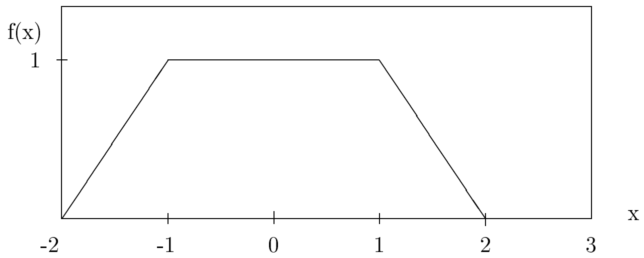
Итак, окончательный ответ. Значение искомого интеграла при $\epsilon = 10^{-3}$ равно $J_1 = 0.386$, а при $\epsilon = 10^{-6}$ $J_2 = 0.385540$.

Точное значение

$$\int_{0.2}^{0.6} \frac{dx}{1+x^4} = 0.38554023$$

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 4$.



На рисунке изображен график функции на отрезке длиной T. Для дальнейшей работы запишем аналитическое выражение на этом отрезке.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x \le -1 \ ; \\ 1, & -1 < x < 1 \ ; \\ \text{-x+2}, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

$f(x)$ - четная функция, поэтому вычисление интегралов в формулах коэффициентов Фурье существенно облегчается. Как Вам показывали на лекции, интеграл с симметричными пределами от нечетной функции равен нулю. А произведение $f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$ как раз нечетная функция, поэтому коэффициенты при синусах будут равны нулю, а вот коэффициенты при косинусах отличны от нуля.

$$a_{\text{n}} = \frac{4}{T}\int_0^{\text{T}/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nx}{4}\right)\Big|_0^1 + \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \text{x}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx.$$

Последний интеграл вычисляется по частям

$$\int_1^2 x\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi n}x\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_1^2 - \frac{2}{\pi n}\int_1^2 \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx =$$

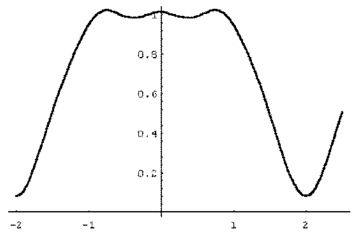


Рис. 4: График частичной суммы ряда Фурье.

$$\frac{2}{\pi n}\left[2\sin\left(\frac{\pi n 2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] + \frac{4}{(\pi n^2)}\left[\cos\left(\frac{\pi n 2}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right].$$

Ниже приводится искомый ряд Фурье для $f(x)$, а также график его частичной суммы 5-го порядка.

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{\text{k}} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(\pi k)}{k^2} \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$

Вычисление фурье-коэффициентов довольно трудоемкое занятие, поэтому старайтесь вашу задачу свести к какой-то более простой. Вот как это можно сделать в данном случае.

Представим заданную функцию в виде суммы двух, $f_1(x)$ и $f_2(x)$: с периодом T = 2;

$$f_1(x) = \begin{cases} -x/2, & -1 \le x \le 0, \\ x/2, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} (x+2)/2, & -2 \le x \le 0, \\ (2-x)/2, & 0 < x \le 2. \end{cases}$$

период последней функции T=4. График каждой из функций - “пила“, только вторая сдвинута вдоль оси OX и растянута. Фурье - разложение первой функции получается легко

$$a_{\text{k}} = \ x\cos(\pi kx)dx \Leftrightarrow f_1(x) \sim \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi}\sum \frac{\cos((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^2}.$$

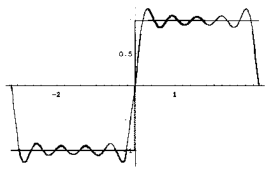


Рис. 5: График частичной суммы ряда Фурье.

А для второй функции разложение можно получить прямо из этого, если учесть упомянутые различия: растяжение по оси ОУ - умножить правую часть на 2, растяжение по ОХ - разделить аргумент на 2, смещение по ОХ влево на 2 единицы - заменить x на $(x+2)$. Получаем

$$f_2(x \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi).$$

Осталось сложить полученные выражения и привести их к стандартному виду тригонометрического ряда Фурье.

б) функцию, заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая ее четным или нечетным образом

$$f(x) = \operatorname{sign}(x - \pi/2)$$

Построить график суммы полученного ряда.

Обозначение sign(x) в правой части используется в литературе для *знаковой функции* .

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Продолжим ее нечетным образом, т.е. определим новую функцию, $\tilde{f}(x)$ - периодическую и нечетную, которая совпадает на $[0,\pi]$ с заданной. Для нечетной функции фурье - разложение содержит только синусы.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(-\sin(2nx)dx) + \int_{\pi/2}^{\pi} sin(2nx)dx =$$

$$= \frac{2}{2\pi n}\left(\cos(2nx)\Big|_0^{\pi/2} - \cos(2nx)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n}((-1)^{\mathrm{n}} - 1).$$

$$f(x) \sim -\frac{4}{\pi}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)}{(2n+1)^2}$$

Один из методов суммирования числовых рядов состоит в использовании подходящего ряда Фурье, сходящегося к известной функции и совпадающего с данным числовым при некотором значении x . Значение функции при этом x и будет суммой числового ряда. Здесь нет какой-то формулы, позволяющей "вычислить" сумму. Вам придется просмотреть большое количество готовых разложений. Где их взять? Воспользуйтесь задачником, вернее, разделом ответов.

В нашем случае фурье-коэффициент имеет в знаменателе квадрат нечетного числа. Где-то мы это видели ! Отлистните-ка пару страниц назад: "пила". Правда, там было разложение по косинусам. Но ведь это определяется симметрией графика, значит "пилу" надо поместить симметрично относительно начала координат. Наше предположение оправдывается, искомое разложение

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2}\dots\right).$$

При $x = 1$ выражение в скобках есть искомый ряд. Поскольку ряд Фурье для функции - "пилы" сходится к ней в любой точке, а $f(1) = 1$, то интересующее нас значение суммы ряда $\pi/4$.

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М. :Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М. :Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.Т. II М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. I,М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы,1974.

5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ.Т. I,II. М.: Высшая школа.1970.