1. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Терминология с примерами(кратко)

Определение. *Обыкновенным графом* или просто *графом* G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество, элементы которого называют *вершинами*, а E — конечное семейство неупорядоченных пар вершин, называемых *ребрами*.

Граф $G = (V, E)$ представляют в виде диаграммы, которую часто также называют графом. Вершины графа изображаются в виде точек, а ребра в виде отрезков или дуг, их соединяющих. Например, на рис. 21 изображен граф $G = (V, E)$, где

$$V = \{1, 2, \dots, 12\},$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \dots, \{11, 12\}\}.$$

Если ребро $e = \{u, v\}$ для некоторых вершин u, v графа G, то говорят, что ребро *e инцидентно* вершинам u, v и каждая из вершин u, v *инцидентна* ребру e.

Для графа G через $V(G)$ мы будем обозначать множество всех его вершин, а через $E(G)$ — множество всех его ребер.

Определение. Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа G, если $V' \subseteq V,\ E' \subseteq E$.

Определение. *Маршрут* в графе G — это чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и кончающаяся вершиной, в которой каждое ребро инцидентно двум вершинам: непосредственно предшествующей ему и непосредственно следующей за ним.

Определение. Открытый маршрут называют *простой цепью*, если различны все его вершины (а следовательно, и все ребра).

Определение. *Циклом* называется замкнутая цепь, а простым циклом — замкнутый маршрут, все вершины которого (числом не менее трех) различны.

Определение. Граф называется *связным*, если любые две его вершины соединяются простой цепью. *Компонента связности* графа — это максимальный по включению его связный подграф.

Иногда простые цепи и циклы определяют в виде упорядоченных последовательностей только ребер или только вершин.

Определение. *Ациклическим* называется граф, в котором отсутствуют циклы. Граф без циклов называется *лесом*. *Дерево* — это связный ациклический граф.

Теорема 1. *Если G — дерево, $n = |V|$, $m = |E|$, то любые две вершины в G связаны единственной простой цепью и $m = n - 1$.*

Определение. Граф G называется *взвешанным*, если любому его ребру $\{u, v\}$ приписан его вес $c(u, v)$ — произвольное неотрицательное число. *Вес подграфа* G' определяется как сумма весов всех ребер, входящих в этот подграф.

1.1. Описание графов (Основные способы представления графов в памяти ЭВМ)

1.2. Задача о минимальном остове связного графа

Пусть $G = (V, E)$ — связный взвешенный граф.

Определение. *Остовом* графа G называется его подграф $\Gamma = (V, E')$, где $E' \subseteq E$, являющийся деревом.

Определение. *Минимальным остовом* графа G называется его остов наименьшего веса.

Алгоритм построения минимального остова

Перед началом работы алгоритма все ребра исходного графа $G = (V, E)$ не окрашены. Упорядочить ребра $e_1, \ldots, e_m$ графа по возрастанию их весов.

Шаг 1. Окрасить ребро $e_1 = \{u_1, v_1\}$ и образовать подграф $\Gamma_i = (\{u_1, v_1\}, \{e_1\})$. Присвоить $i := 1$.

Пока $i \leq m - 1$ выполнять шаг i+1.

Шаг i+1. Пусть $e_{i+1} = \{u_{i+1}, v_{i+1}\}$. Возможны четыре варианта.

1). Пусть $u_{i+1}, v_{i+1} \notin V(\Gamma_i)$. Тогда окрасить ребро e_i и сформировать подграф Γ_{i+1}, добавив к компонентам связности подграфа Γ_i новую компоненту связности — рассматриваемое ребро.

2). Пусть одна из вершин, инцидентных ребру e_{i+1}, принадлежит множеству, $V(\Gamma_i)$, а другая ему не принадлежит. Без ограничения общности

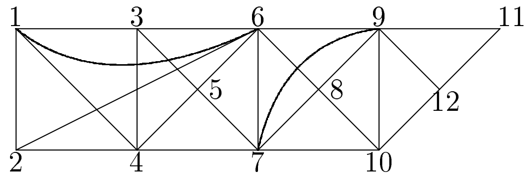


Рис. 21

$u_{i+1} \in V(\Gamma_i)$, $v_{i+1} \notin V(\Gamma_i)$. Тогда окрасить ребро e_{i+1} и сформировать подграф Γ_{i+1}, добавив его к той компоненте связности подграфа Γ_i, которая содержит вершину u_{i+1}.

3). Пусть $u_{i+1}, v_{i+1} \in V(\Gamma_i)$, причем $u_{i+1} \in V(\Gamma_i^k)$, $v_{i+1} \in V(\Gamma_i^l)$ и $k \neq l$. Здесь Γ_i^k, Γ_i^l — некоторые компоненты связности графа Γ_i. Тогда окрасить ребро e_{i+1} и сформировать подграф Γ_{i+1}, объединив при помощи ребра e_{i+1} обе компоненты связности Γ_i^k, Γ_i^l подграфа Γ_i в одну компоненту связности подграфа Γ_{i+1}.

4). Пусть $u_{i+1}, v_{i+1} \in V(\Gamma_i)$, причем $u_{i+1}, v_{i+1} \in V(\Gamma_i^j)$. Здесь Γ_i^j — одна из компонент связности графа Γ_i. Тогда ребро e_{i+1} не окрашивать и не включать в подграф Γ_i и положить $\Gamma_{i+1} := \Gamma_i$.

Получившиеся в результате преобразований компоненты связности подграфа Γ_{i+1} обозначить через $\Gamma_{i+1}^1, \Gamma_{i+1}^2, \dots, \Gamma_{i+1}^{k_{i+1}}$.

Присвоить $i := i + 1$.

Если $i = m$, то *КОНЕЦ АЛГОРИТМА.*

Подграф Γ_m является искомым.

Задача 1. Найти минимальный остов связного графа, изображенного на рис. 21, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1.1$, $c(1,3) = 0.8$, $c(1,4) = 3$, $c(1,6) = 7.3$, $c(2,4) = 0.6$, $c(2,6) = 9$, $c(3,4) = 5$, $c(3,5) = 7.9$, $c(3,6) = 6.6$, $c(4,5) = 2.2$, $c(4,7) = 10$, $c(5,6) = 8.2$, $c(5,7) = 7.4$, $c(6,7) = 5.1$, $c(6,8) = 4.1$, $c(6,9) = 0.5$, $c(7,8) = 5.4$, $c(7,9) = 6.2$, $c(7,10) = 7.8$, $c(8,9) = 6.8$, $c(8,10) = 3.3$, $c(9,10) = 6.7$, $c(9,11) = 10$, $c(9,12) = 9.9$, $c(10,12) = 4$, $c(11,12) = 5.6$.

Решение. Упорядочим ребра графа по возрастанию их весов: $e_1 = \{6,9\}$, $e_2 = \{2,4\}$, $e_3 = \{1,3\}$, $e_4 = \{1,2\}$, $e_5 = \{4,5\}$, $e_6 = \{1,4\}$, $e_7 = \{8,10\}$, $e_8 = \{10,12\}$, $e_9 = \{6,8\}$, $e_{10} = \{3,4\}$, $e_{11} = \{6,7\}$, $e_{12} = \{7,8\}$, $e_{13} = \{11,12\}$, $e_{14} = \{7,9\}$, $e_{15} = \{3,6\}$, $e_{16} = \{9,10\}$, $e_{17} = \{8,9\}$, $e_{18} = \{1,6\}$, $e_{19} = \{5,7\}$, $e_{20} = \{7,10\}$, $e_{21} = \{3,5\}$, $e_{22} = \{5,6\}$, $e_{23} = \{2,6\}$, $e_{24} = \{9,12\}$, $e_{25} = \{4,7\}$, $e_{26} = \{9,11\}$.

Шаг 1. Полагаем $\Gamma_1 = (\{6,9\}, \{e_1\})$ и окрашиваем ребро e_1 (рис. 22).

Шаг 2. Вершины 2,4, инцидентные ребру e_2, не принадлежат множеству $V(\Gamma_1)$, это случай (1), поэтому имеем граф

$$\Gamma_2 = (\{2,4,6,9\}, \{e_1, e_2\}),$$

состоящий из двух компонент связности $\Gamma_2^1 = (\{6,9\}, \{e_1\})$, $\Gamma_2^2 = = (\{2,4\}, \{e_2\})$ (рис. 23). Окрашиваем ребро e_2.

Шаг 3. Для ребра $e_3 = \{1,3\}$ вершины $1,3 \notin V(\Gamma_1)$, и мы снова оказываемся в условиях случая (1). Таким образом получаем граф

$$\Gamma_3 = (\{1,2,3,4,6,9\}, \{e_1, e_2, e_3\}),$$

с тремя компонентами связности $\Gamma_3^1 = \Gamma_1^2$, $\Gamma_3^2 = \Gamma_2^2$, $\Gamma_3^3 = (\{1,3\}, \{e_3\})$ (рис. 25). Ребро e_3 окрашиваем.

Шаг 4. Вершины 1,2 ребра e_4 принадлежат $V(\Gamma_3)$, причем $1 \in V(\Gamma_3^3)$, $2 \in V(\Gamma_3^2)$, что является случаем (3). Поэтому получаем граф

$$\Gamma_4 = (\{1,2,3,4,6,9\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}),$$

одна компонента связности Γ_1^4 которого совпадает с Γ_1^3, а вторая Γ_2^4 получена склеиванием компоненты Γ_2^3, Γ_3^3 при помощи ребра e_4 (рис. 25). Ребро e_4 окрашиваем.

Шаг 5. Для ребра $e_5 = \{4,5\}$ имеем $4 \in V(\Gamma_4)$, $5 \notin V(\Gamma_4)$, и мы оказываемся в условиях пункта (2). Следовательно, (см. рис. 26)

$$\Gamma_5 = (\{1,2,3,4,5,6,9\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$$

и $\Gamma_5^1 = \Gamma_4^1$,

$$\Gamma_5^2 = (\{1,2,3,4,5\}, \{e_2, e_3, e_4, e_5\}).$$

Само ребро e_5 окрашиваем.

Шаг 6. Обе вершины ребра $e_6 = \{1,4\}$ не принадлежат $V(\Gamma_5)$, и мы в соответствии со случаем (4) ребро e_6 в граф Γ_6 не включаем и не окрашиваем. Таким образом, $\Gamma_6 = \Gamma_5$, $\Gamma_6^1 = \Gamma_5^1$, $\Gamma_6^2 = \Gamma_5^2$.

Шаг 7. Для ребра $e_7 = \{8,10\}$ вершины $8,10 \notin V(\Gamma_6)$. Значит,

$$\Gamma_7 = (\{1,2,3,4,5,6,8,9,10\}, \{e_1, e_2, \ldots, e_7\}),$$

где $\Gamma_7^1 = \Gamma_6^1$, $\Gamma_7^2 = \Gamma_6^2$, $\Gamma_7^3 = (\{8,10\}, \{e_7\})$ (рис. 27).

Шаг 8. Для ребра $e_8 = \{10,12\}$ имеем $10 \in V(\Gamma_7)$, $12 \notin V(\Gamma_7)$, поэтому

$$\Gamma_8 = (\{1,2,\ldots,6,8,9,10,12\}, \{e_1, e_2, \ldots, e_8\}),$$

где $\Gamma_8^1 = \Gamma_7^1$, $\Gamma_8^2 = \Gamma_7^2$, $\Gamma_8^3 = (\{8,10,12\}, \{e_7, e_8\})$ (рис. 28). Ребро e_8 окрашиваем.

Шаг 9. Вершины $6, 8$ ребра e_9 принадлежат разным компонентам связности графа Γ_8, поэтому

$$\Gamma_9 = (\{1, 2, \dots , 6, 8, 9, 10, 12\}, \{e_1, e_2, \dots , e_5, e_7, e_8, e_9\}),$$

где $\Gamma_9^1 = (\{6, 8, 9, 10, 12\}, \{e_1, e_7, e_8, e_9\})$, $\Gamma_9^2 = \Gamma_8^2$ (рис. 29). Ребро e_9 окрашиваем.

Шаг 10. Ребро $e_{10} = \{3, 4\}$ не включаем, полагая при этом $\Gamma_{10} = \Gamma_9$, $\Gamma_{10}^1 = \Gamma_9^1$, $\Gamma_{10}^2 = \Gamma_9^2$.

Шаг 11. Добавляя ребро $e_{11} = \{6, 7\}$ к компоненте Γ_{10}^2, получаем (см. рис. 30)

$$\Gamma_{11} = (\{1, 2, \dots , 12\}, \{e_1, e_2, \dots , e_5, e_7, e_8, e_9, e_{11}\}),$$

при этом $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{10}^1$,

$$\Gamma_{11}^2 = (\{6, 7, 8, 9, 10, 12\}, \{e_1, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}).$$

Ребро e_{11} окрашиваем.

Шаг 12. Ребро $e_{12} = \{7, 8\}$ не включаем и полагаем $\Gamma_{12} = \Gamma_{11}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^2$.

Шаг 13. Добавляя ребро $e_{13} = \{11, 12\}$ к компоненте Γ_{12}^2 графа Γ_{12}, получаем компоненту Γ_{13}^2 графа Γ_{13}. Другую компоненту при этом не меняем: $\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{12}^1$ (рис. 31). Само ребро при этом окрашиваем.

Шаг 14. Ребро $e_{14} = \{7, 9\}$ не включаем, полагая $\Gamma_{14} = \Gamma_{13}$.

Шаг 15. Наконец, соединяя компоненты Γ_{14}^1 и Γ_{14}^2, ребром $e_{15} = \{3, 6\}$, которое окрашиваем, получаем граф

$$\Gamma_{15} = (\{1, 2, \dots , 12\}, \{e_1, e_2, \dots , e_5, e_7, e_8, e_9, e_{11}, e_{13}, e_{15}\})$$

(см. рис. 32) — искомый минимальный остов исходного графа.

Ответ. Дерево

$$(\{1, 2, \dots , 12\}, \{\{6, 9\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{8, 10\}, \{10, 12\},$$
$$\{6, 8\}, \{6, 7\}, \{11, 12\}, \{3, 6\}\})$$

является минимальным остовом.

1.3. Задача о кратчайшем пути в связном графе

Пусть $G = (V, E)$ — связный взвешанный граф,

$$V = \{v_1, v_2, \dots v_k\},\ E = \{e_1, e_2, \dots e_m\}.$$

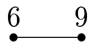


Рис. 22

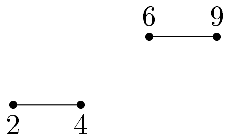


Рис. 23

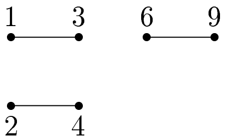


Рис. 24

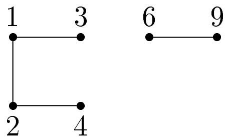


Рис. 25

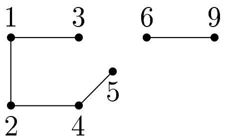


Рис. 26

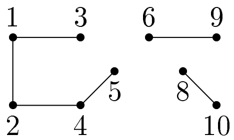


Рис. 27

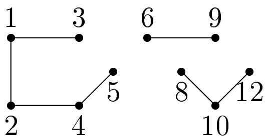


Рис. 28

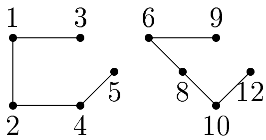


Рис. 29

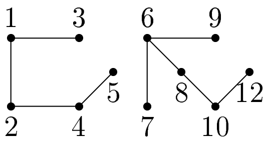


Рис. 30

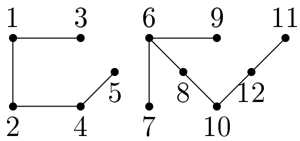


Рис. 31

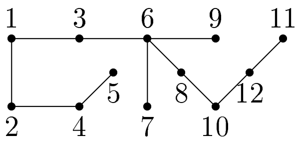


Рис. 32

Определение. *Путь* из вершины u в вершину v графа G — это простая цепь этого графа, соединяющая вершину u и вершину v.

Определение. *Кратчайший путь* из вершины u в вершину v — это путь из u в v наименьшего веса.

Определение. *Деревом кратчайших путей* графа G из вершины u называется множество кратчайших путей из вершины u до каждой вершины этого графа.

Приведем алгоритм нахождения кратчайшего пути из вершины v_1 в вершину v_n данного графа G.

Алгоритм построения кратчайшего пути

Шаг 1. Окрасить вершину v_1 и присвоить вершинам графа веса $\alpha(v_1) = 0$, $\alpha(v_2) = \ldots = \alpha(v_n) = +\infty$. Полагаем $v := v_1$.

Шаг 2. Для каждой неокрашенной вершины v_i изменить вес по следующему правилу:

$$\alpha(v_i) = \min\{\alpha(v_i), \alpha(v) + c(v, v_i)\}. \tag{1}$$

Окрасить ту из вершин v_j, для которой число $\alpha(v_j)$ окажется наименьшим. Окрасить также ребро, ведущее в выбранную на данном шаге вершину v_j по кратчайшему пути, т.е. по пути веса $\alpha(v_j)$. Положить $v = v_j$.

Шаг 3. Если $v = v_n$, то *КОНЕЦ АЛГОРИТМА*. Если $v \neq v_n$, то перейти к шагу 2.

Поднимаясь по дереву кратчайших путей от вершины v_n к вершине v_1, т.е. двигаясь по окрашенным ребрам, получаем простую цепь

$$[v_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, v_1].$$

Искомый кратчайший путь — это путь

$$[v_1, u_{n-2}, \ldots, u_2, u_1, v_n].$$

Его вес равен $c(v_1) + c(u_{n-1}) + \ldots + c(u_2) + c(v_n)$.

Задача 2. Найти кратчайший путь от вершины 1 к вершине 12 в графе из задачи 1 и его вес.

Решение. Дерево кратчайших путей из вершины 1, т.е. все вершины и ребра, окрашиваемые в процессе работы алгоритма, изобразим на рис. 33 соответственно темными кругами и толстыми линиями.

Шаг 1. Окрашиваем вершину 1 и присваиваем вершинам графа веса $\alpha(1) = 0$, $\alpha(2) = \ldots = \alpha(12) = +\infty$. Полагаем $v := 1$.

Шаг 2. По формуле (1) вычисляем

$$\begin{array}{l}
\alpha(2) := \min\{\alpha(2), \alpha(v) + c(v,2)\} = \min\{+\infty, 0 + 1.1\} = 1.1; \\
\alpha(3) := \min\{\alpha(3), \alpha(v) + c(v,3)\} = 0.8; \\
\alpha(4) := \min\{\alpha(4), \alpha(v) + c(v,4)\} = 3; \\
\alpha(5) := \min\{\alpha(5), \alpha(v) + c(v,5)\} = +\infty, \\
\alpha(6) := \min\{\alpha(6), \alpha(v) + c(v,6)\} = 7.3; \\
\alpha(7) := +\infty, \ldots, \alpha(12) := +\infty.
\end{array}$$

Вес вершины 3 минимален, и поэтому мы окрашиваем ее, а также ребро $e_1 = \{1, 3\}$. Дерево кратчайших путей состоит пока из единственного ребра e_1. Полагаем $v := 3$.

Шаг 3. Поскольку $v \neq 12$, выполняем шаг 2.

Шаг 2. Подставляя в формулу (1) новые веса вершин и $v = 3$, имеем

$$\begin{array}{l}
\alpha(2) := \min\{1.1, 0.8 + \infty\} = 1.1; \\
\alpha(4) := \min\{3, 0.8 + 5\} = 3; \\
\alpha(5) := \min\{+\infty, 0.8 + 7.9\} = 8.7; \\
\alpha(6) := \min\{7.3, 0.8 + 6.6\} = 7.3; \\
\alpha(7) := \min\{+\infty, 0.8 + \infty\} = +\infty, \ldots, \alpha(12) := +\infty.
\end{array}$$

Теперь окрашиваем вершину 2 и ребро $e_2 = \{1, 2\}$. Полагаем $v := 2$. Деревом кратчайших путей является множество $\{e_1, e_2\}$.

Шаг 3. Поскольку $v \neq 12$, возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. Как и выше, вычисляем:

$$\alpha(4) := 1.7,\ \alpha(5) := 8.7,\ \alpha(6) := 7.3,$$
$$\alpha(7) := +\infty,\ \ldots,\ \alpha(12) := +\infty.$$

Окрашиваем вершину 4 с минимальным весом и ребро $e_3 = \{2, 4\}$, составляющее вместе с ребром e_1 минимальный путь из вершины 1, т.е. путь веса $\alpha(4)$=1.7. Присваиваем $v := 4$. Множество $\{e_1, e_2, e_3\}$ — дерево кратчайших путей.

Шаг 3. $v \neq 12$, поэтому переходим к шагу 2.

Шаг 2. Снова пересчитываем веса

$$\alpha(5) := 2.8,\ \alpha(6) := 7.3,\ \alpha(7) := 11.7,$$
$$\alpha(8) := +\infty,\ \ldots,\ \alpha(12) := +\infty.$$

Окрашиваем вершину 5 с минимальным весом и ребро $e_4 = \{4, 5\}$, идущее в нее из окрашенной ранее вершины и составляющее выбранный минимальный путь из вершины 1, т.е. путь веса $\alpha(5)$. Полагаем $v := 5$. Множество $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — дерево кратчайших путей.

Шаг 3. Ввиду $v \neq 12$, переходим к шагу 2.

Шаг 2.

$$\alpha(6) := 7.3,\ \alpha(7) := 10.2,\ \alpha(8) := +\infty,$$
$$\alpha(9) := +\infty, \dots, \alpha(12) := +\infty.$$

Окрашиваем вершину 6. Чтобы легче было восстановить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 6, заметим, что вес $\alpha(6)$ не менялся при последовательном окрашивании вершин 3,2,4, и 5, а поменялся лишь при окрашивании вершины 1. Поэтому окрашиваем ребро $e_5 = \{1, 6\}$ и полагаем $v := 6$. Деревом кратчайших путей является множество $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Шаг 3. Так как $v \neq 12$, возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2.

$$\alpha(7) := 10.2,\ \alpha(8) := 11.4,\ \alpha(9) := 7.8,$$
$$\alpha(10) := \infty, \alpha 11, \alpha(12) := +\infty.$$

Окрашиваем вершину 9 и ребро $e_6 = \{6, 9\}$. Полагаем $v := 9$. Дерево кратчайших путей в данный момент состоит из ребер $e_1, e_2, \dots, e_6$.

Шаг 3. $v \neq 12$, поэтому переходим к шагу 2.

Шаг 2.

$$\alpha(7) := 10.2,\ \alpha(8) := 11.4,\ \alpha(10) := 14.5,$$
$$\alpha(11) := 17.8,\ \alpha(12) := 17.7.$$

Окрашиваем вершину 7 и ребро $e_7 = \{5, 7\}$. Присваиваем $v := 8$. Дерево кратчайших путей сейчас представляет собой множество $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$.

Шаг 3. Так как $v \neq 12$, мы вновь переходим к шагу 2.

Шаг 2.

$$\alpha(8) := 11.4, \alpha(10) := 14.5, \alpha(11) := 17.8, \alpha(12) := 17.7.$$

Окрашиваем вершину 8 и ребро $e_8 = \{6, 8\}$. Полагаем $v := 8$. Дерево кратчайших путей — это множество $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$.

Шаг 3. Поскольку $v \neq 12$, переходим к шагу 2.

Шаг 2. $\alpha(10) := 14.5$, $\alpha(11) := 17.8$, $\alpha(12) := 17.7$. Окрашиваем вершину 10 и ребро $e_9 = \{9, 10\}$. Полагаем $v := 10$. Деревом кратчайших путей теперь является множество $\{e_1, e_2, \dots, e_9\}$.

Шаг 3. $v \neq 12$, и, значит, переходим к шагу 2.

Шаг 2. $\alpha(11) := 17.8$, $\alpha(12) := 17.7$. Окрашиваем вершину 12 и ребро $e_{10} = \{9, 12\}$ и полагаем $v := 12$. Дерево кратчайших путей — это множество $\{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$.

Шаг 3. Наконец, $v = 12$, и, следовательно, КОНЕЦ АЛГОРИТМА.

Поднимаясь по дереву кратчайших путей от вершины 12 к вершине 1, имеем искомый путь $1, 6, 9, 12$, вес которого составляет $\alpha(12) = 17.7$.

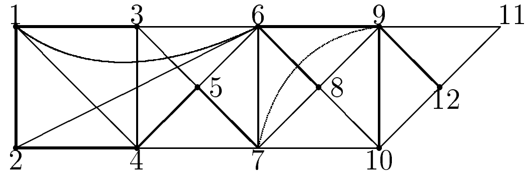


Рис. 33

Ответ. Кратчайший путь: $1, 6, 9, 12$, его вес: 17.7.

1.4. Задача о максимальном паросочетании

Определение. *Паросочетанием* M в графе G называется подмножество ребер этого графа, такое, что каждая вершина графа инцидентна не более чем одному ребру из M. Паросочетание с наибольшим числом ребер называется *максимальным.*

Определение. Вершина графа G называется *открытой*, если она не инцидентна ни одному из ребер паросочетания M.

Ребра из M будем изображать темными линиями, а вершины им, инцидентные, — темными кругами. Ребра, не попавшие в M, будем изображать светлыми линиями, а открытые вершины — окружностями.

Определение. *Увеличивающейся цепью* называется простая цепь

$$[v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, \dots, v_{n-1}, u_n, v_n, u_{n+1}]$$

графа G, такая, что $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{u_i, v_i\} \in M$, $\{v_j, u_{j+1}\} \notin M$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{0, \dots, n\}$ и вершины v_0, u_{n+1} являются открытыми (см. рис. 34).

Алгоритм построения максимального паросочетания

Шаг 1. Полагаем $M := \emptyset$.

Шаг 2. Выбираем произвольно открытую вершину v_0. Если существует увеличивающаяся цепь

$$p := [v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, \dots, v_{n-1}, u_n, v_n, u_{n+1}],$$

начинающаяся с этой вершины (см. рис. 34), то полагаем

$$M := M \cup \{\{v_0, u_1\}, \{v_1, u_2\}, \{v_2, u_3\}, \dots, \{v_{n-1}, u_n\}, \{v_n, u_{n+1}\}\} \setminus \setminus \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_n, v_n\}\}.$$

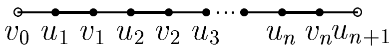


Рис. 34

Таким образом, для любой увеличивающейся цепи "светлые"ребра включаем в паросочетание M, а "темные"ребра из него исключаем. А если такой цепи не существует, то *КОНЕЦ АЛГОРИТМА.*

Шаг 3. Если еще есть открытые вершины, то переходим к шагу 2. Если их нет, то *КОНЕЦ АЛГОРИТМА.*

Заметим, что решение задачи о максимальном паросочетании, вообще говоря, неоднозначно и зависит от выбора открытых вершин и соответствующих увеличивающихся цепей на шаге 2.

Задача 3. Найти максимальное паросочетание в графе, изображенном на рис. 21.

Решение. На каждом шаге алгоритма ребра, входящие в строящееся максимальное паросочетание, будем выделять на рис. 35–46 темными линиями, а вершины, им инцидентные, — темными кругами.

Шаг 1. Полагаем $M := \emptyset$.

Шаг 2. Выбираем в качестве открытой вершины, например, вершину 1, а в качестве увеличивающейся цепи p, начинающейся с этой открытой вершины, например, цепь $[1,2]$ (см. рис. 35). Тогда

$$M := \{\{1,2\}\}$$

(см. рис. 36).

Шаг 3. Открытые вершины еще есть, поэтому переходим к шагу 2.

Шаг 2. Теперь в качестве открытой вершины возьмем вершину 3, а в качестве соответствующей увеличивающейся цепи p — цепь $[3,1,2,4]$ (рис. 37). Тогда

$$M := \{\{1,3\},\{2,4\}\}$$

(рис. 38). *Шаг 3.* Еще есть открытые вершины, поэтому переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вершина 5 открыта, и цепь $p := [5,3,1,2,4,7]$ (рис. 39) является увеличивающейся. Таким образом, (см. рис. 40)

$$M := \{\{3,5\},\{1,2\},\{4,7\}\}.$$

Шаг 3. Поскольку открытые вершины еще есть, вновь переходим к шагу 2.

Шаг 2. Беря вершину 6 в качестве открытой и цепь
$p := [6, 5, 3, 1, 2, 4, 7, 9]$ в качестве увеличивающейся (см. рис. 41), имеем (рис. 42)

$$M := \{\{5, 6\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{7, 9\}\}.$$

Шаг 3. Переходим к шагу 2, ибо открытые вершины еще есть.

Шаг 2. Вершина 8 открытая, и цепь $p := [8, 9, 7, 10]$ увеличивающаяся (рис. 43). Значит, (см. рис. 44),

$$M := \{\{8, 9\}, \{7, 10\}, \{5, 6\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Шаг 3. Наконец, выбираем открытую вершину 11 и в последний раз переходим к шагу 2.

Шаг 2. Единственно возможной увеличивающейся цепью является цепь $p := [11, 9, 8, 7, 10, 12]$ (рис. 45). И искомым паросочетанием тогда будет множество (см. рис. 46)

$$M := \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 11\}, \{10, 12\}.\}$$

Ответ. Максимальным паросочетанием является множество

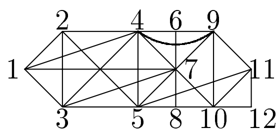
$$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 11\}, \{10, 12\}\}.$$

2. *

Индивидуальное домашнее задание

Вариант №1

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 12 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1, 2) = 1.3$, $c(1, 3) = 2.4$, $c(1, 4) = 3.1$, $c(1, 7) = 0.5$, $c(2, 3) = 4.2$, $c(2, 4) = 2.3$, $c(2, 5) = 4.5$, $c(3, 4) = 1.3$, $c(3, 5) = 0.9$, $c(3, 7) = 1.1$, $c(4, 5) = 5.3$, $c(4, 6) = 6$, $c(4, 7) = 3$, $c(4, 9) = 1$, $c(5, 7) = 7.3$, $c(5, 8) = 8$, $c(5, 11) = 6.4$, $c(6, 7) = 3.5$, $c(6, 9) = 7.8$ $c(7, 8) = 3$, $c(7, 9) = 3.6$, $c(7, 10) = 2$, $c(8, 10) = 10$, $c(9, 10) = 3$, $c(9, 11) = 5$, $c(10, 11) = 4.6$, $c(10, 12) = 4.8$, $c(11, 12) = 1.7$.



Вариант №2

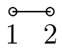


Рис. 35

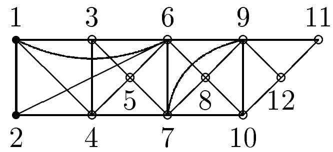


Рис. 36

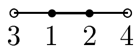


Рис. 37

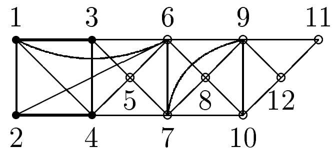


Рис. 38

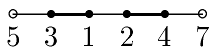


Рис. 39

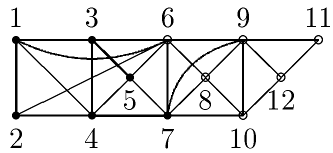


Рис. 40

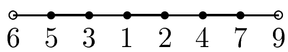


Рис. 41

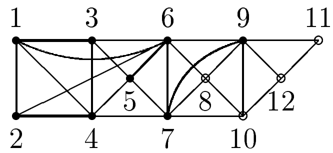


Рис. 42

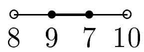


Рис. 43

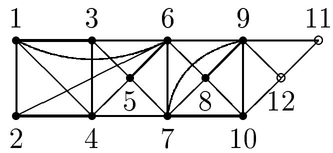


Рис. 44

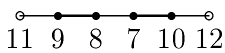


Рис. 45

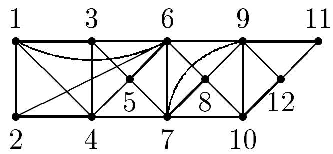
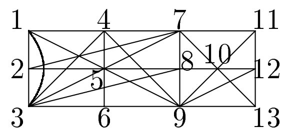


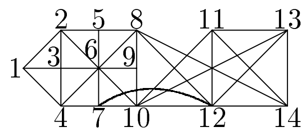
Рис. 46

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 13 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1.5$, $c(1,4) = 1$, $c(1,5) = 0.9$, $c(1,3) = 2$, $c(2,3) = 2.1$, $c(2,5) = 3$, $c(2,7) = 1.7$, $c(3,4) = 3$, $c(3,5) = 0.1$, $c(3,6) = 4.5$, $c(4,5) = 5$, $c(4,7) = 5.7$, $c(4,9) = 7.3$, $c(5,6) = 3.2$, $c(5,7) = 1.8$, $c(5,8) = 9$, $c(5,9) = 2$, $c(6,9) = 4$, $c(7,8) = 4.2$, $c(7,10) = 6$, $c(7,11) = 6.7$, $c(8,9) = 3$, $c(8,10) = 4$, $c(9,10) = 6.5$, $c(9,13) = 3.7$, $c(10,11) = 2.5$, $c(10,12) = 2.7$, $c(10,13) = 3.4$, $c(11,12) = 1$, $c(12,13) = 2.6$.



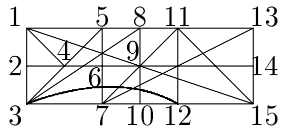
Вариант №3

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 14 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1$, $c(1,3) = 2$, $c(1,4) = 3$, $c(2,3) = 2$, $c(2,5) = 3$, $c(2,6) = 5$, $c(3,4) = 7$, $c(3,6) = 3$, $c(4,6) = 2$, $c(4,7) = 3$, $c(4,9) = 5$, $c(5,6) = 1$, $c(5,8) = 8$, $c(6,7) = 5$, $c(6,8) = 7$, $c(6,9) = 6$ $c(7,10) = 3$, $c(7,12) = 2$, $c(8,9) = 8$, $c(8,12) = 2$, $c(8,14) = 1$, $c(9,10) = 3$, $c(10,11) = 4$, $c(10,13) = 5$, $c(11,12) = 7$, $c(11,13) = 5$, $c(11,14) = 4$, $c(12,13) = 1$, $c(12,14) = 5$, $c(13,14) = 9$.



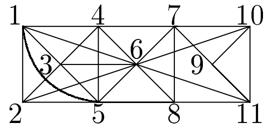
Вариант №4

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 15 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1.3$, $c(1,4) = 1$, $c(1,5) = 2$, $c(1,9) = 3$, $c(2,3) = 4$, $c(2,4) = 2$, $c(3,4) = 2$, $c(3,7) = 3$, $c(3,12) = 5$, $c(4,5) = 5.7$, $c(4,6) = 1.5$, $c(5,6) = 6$, $c(5,8) = 4$, $c(6,7) = 7$, $c(6,9) = 5.3$, $c(7,9) = 1.2$, $c(7,10) = 2$, $c(8,9) = 2.4$, $c(8,11) = 5$, $c(9,10) = 3.9$, $c(9,11) = 4$, $c(9,14) = 3.7$, $c(9,15) = 5.2$, $c(10,12) = 3.8$, $c(11,12) = 2$, $c(11,13) = 1$, $c(11,15) = 5.4$, $c(12,15) = 3.2$, $c(13,14) = 9$, $c(14,15) = 7$.



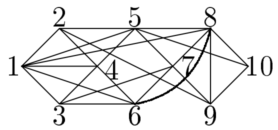
Вариант №5

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 11 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2$, $c(1,3) = 1.2$, $c(1,4) = 5$, $c(1,5) = 1.5$, $c(1,6) = 4$, $c(2,3) = 7.1$, $c(2,5) = 3.8$, $c(2,6) = 7.2$, $c(3,4) = 8$, $c(3,5) = 2$, $c(3,6) = 1.5$, $c(4,5) = 1$, $c(4,6) = 6$, $c(4,7) = 7.2$, $c(5,6) = 3.5$, $c(5,8) = 2.2$, $c(6,7) = 0.8$, $c(6,8) = 6.5$, $c(6,10) = 1.9$, $c(6,11) = 3$, $c(7,8) = 1$, $c(7,9) = 2.1$, $c(7,10) = 2.5$, $c(8,11) = 10$, $c(9,10) = 2.4$, $c(9,11) = 4$, $c(10,11) = 0.7$.



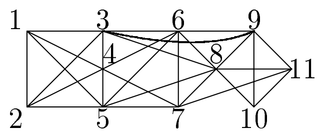
Вариант №6

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2$, $c(1,3) = 3$, $c(1,4) = 4$, $c(1,5) = 7$, $c(1,6) = 1$, $c(1,8) = 5$, $c(2,4) = 6$, $c(2,5) = 7$, $c(2,9) = 9$, $c(3,4) = 4$, $c(3,6) = 5$, $c(3,7) = 0.5$, $c(4,5) = 1$, $c(4,6) = 6$, $c(4,7) = 7.2$, $c(5,7) = 7$, $c(5,8) = 2$, $c(5,10) = 5$, $c(6,7) = 3$, $c(6,8) = 0.4$, $c(7,8) = 4$, $c(7,9) = 3$, $c(8,9) = 7$, $c(8,10) = 8$, $c(9,10) = 4$.



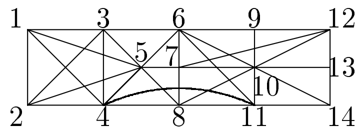
Вариант №7

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 11 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1.2$, $c(1,3) = 3$, $c(1,4) = 1.6$, $c(1,5) = 2$, $c(2,3) = 4$, $c(2,4) = 3$, $c(2,5) = 2$, $c(3,4) = 4.5$, $c(3,6) = 7$, $c(3,8) = 1.8$, $c(3,9) = 4$, $c(4,5) = 3$, $c(4,6) = 1.7$, $c(4,7) = 5$, $c(5,6) = 4$, $c(5,7) = 7$, $c(5,8) = 9$, $c(6,7) = 6$, $c(6,8) = 3.2$, $c(6,9) = 4$, $c(7,8) = 5.6$, $c(7,11) = 3$, $c(8,9) = 7$, $c(8,10) = 9$, $c(8,11) = 8$, $c(9,10) = 3$, $c(9,11) = 4.3$, $c(10,11) = 5$.



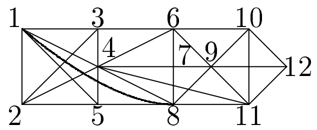
Вариант №8

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 14 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 4$, $c(1,3) = 3$, $c(1,4) = 1$, $c(1,5) = 2$, $c(2,3) = 4$, $c(2,4) = 4$, $c(2,5) = 2.1$, $c(3,4) = 5$, $c(3,5) = 7$, $c(3,6) = 1.8$, $c(4,5) = 1.5$, $c(4,8) = 1$, $c(4,11) = 8.3$, $c(5,6) = 3$, $c(5,7) = 2$, $c(5,8) = 9$, $c(6,7) = 7$, $c(6,9) = 3.2$, $c(6,10) = 6$, $c(6,11) = 5$, $c(7,8) = 10$, $c(7,10) = 5$, $c(7,12) = 3$, $c(8,10) = 8$, $c(8,11) = 5$, $c(9,10) = 3$, $c(9,12) = 2$, $c(10,11) = 2$, $c(10,12) = 0.3$, $c(10,13) = 7$, $c(10,14) = 3$, $c(11,14) = 10$, $c(12,13) = 1$, $c(13,14) = 5$.



Вариант №9

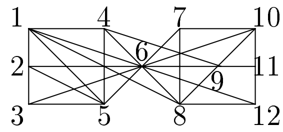
6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 12 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2.4$, $c(1,3) = 3.1$, $c(1,4) = 7$, $c(1,5) = 3$, $c(1,5) = 4$, $c(2,3) = 4.8$, $c(2,4) = 0.7$, $c(2,5) = 1$, $c(3,4) = 6.2$, $c(3,6) = 7$, $c(4,5) = 5.5$, $c(4,6) = 5$, $c(4,7) = 6.3$, $c(4,8) = 3$, $c(4,11) = 6$, $c(5,8) = 3$, $c(6,7) = 1.7$, $c(6,9) = 3.3$, $c(6,10) = 4.6$, $c(7,8) = 6$, $c(7,9) = 6.5$, $c(8,9) = 3.5$, $c(8,11) = 4.5$, $c(9,10) = 3$, $c(9,11) = 2$, $c(9,12) = 2.7$, $c(10,11) = 4$, $c(10,12) = 4.3$, $c(11,12) = 1$.



Вариант №10

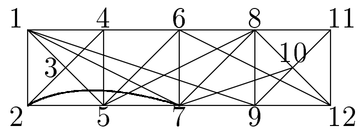
6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 12 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2$, $c(1,4) = 1$, $c(1,5) = 4$, $c(1,6) = 5$, $c(1,8) = 3$, $c(2,3) = 2$, $c(2,5) = 1$, $c(2,6) = 2$,

$c(3,5) = 5$, $c(3,6) = 9$, $c(4,5) = 8$, $c(4,6) = 9$, $c(4,9) = 5$, $c(5,6) = 3$, $c(6,7) = 3$, $c(6,8) = 6$, $c(6,9) = 5$, $c(6,10) = 7$, $c(6,12) = 8$, $c(7,8) = 4$, $c(7,10) = 1$, $c(8,9) = 2$, $c(8,12) = 2$, $c(9,10) = 2$, $c(9,11) = 6$, $c(10,11) = 1$, $c(11,12) = 10$.



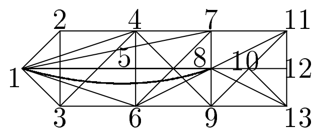
Вариант №11

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 12 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2.8$, $c(1,3) = 2.5$, $c(1,4) = 3$, $c(1,7) = 5.2$, $c(1,8) = 4.1$, $c(2,3) = 1$, $c(2,5) = 7$, $c(2,7) = 6$, $c(3,4) = 1.5$, $c(3,5) = 2$, $c(4,5) = 0.8$, $c(4,6) = 2$, $c(5,6) = 5$, $c(5,7) = 6$, $c(5,8) = 3$, $c(6,7) = 8$, $c(6,8) = 3.5$, $c(6,12) = 10$, $c(7,8) = 5$, $c(7,9) = 6.8$, $c(7,10) = 6$, $c(8,9) = 10$, $c(8,10) = 1$, $c(8,11) = 4$, $c(9,10) = 10$, $c(9,12) = 5$, $c(10,11) = 8$, $c(10,12) = 9$, $c(11,12) = 3$.



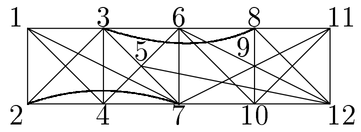
Вариант №12

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 13 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2.4$, $c(1,3) = 1.6$, $c(1,4) = 1$, $c(1,5) = 0.9$, $c(1,6) = 2.4$, $c(1,8) = 7$, $c(2,3) = 3$, $c(2,4) = 4$, $c(3,4) = 5.6$, $c(3,6) = 6$, $c(4,5) = 1.5$, $c(4,7) = 2.9$, $c(4,9) = 6$, $c(5,6) = 4.8$, $c(5,8) = 9$, $c(6,7) = 5.2$, $c(6,8) = 4.6$, $c(6,9) = 6.1$, $c(7,8) = 1$, $c(7,11) = 1$, $c(8,9) = 5.7$, $c(8,10) = 3$, $c(8,11) = 4.3$, $c(8,13) = 3.9$, $c(9,10) = 9$, $c(9,13) = 10$, $c(10,11) = 1.1$, $c(10,12) = 1.2$, $c(10,13) = 1.3$, $c(11,12) = 5$, $c(12,13) = 5$.



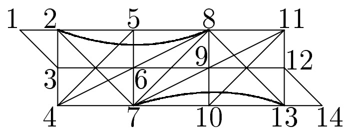
Вариант №13

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 12 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2$, $c(1,3) = 1$, $c(1,4) = 5$, $c(1,7) = 3$, $c(2,3) = 7$, $c(2,4) = 3$, $c(2,7) = 1$, $c(3,4) = 8$, $c(3,5) = 9$, $c(3,6) = 5$, $c(3,8) = 10$, $c(4,5) = 3.6$, $c(4,7) = 3.9$, $c(5,6) = 2$, $c(5,7) = 1.5$, $c(5,12) = 6.7$, $c(6,7) = 4$, $c(6,8) = 1$, $c(6,10) = 7.1$, $c(6,9) = 1.5$, $c(7,9) = 2.2$, $c(7,10) = 9$, $c(8,9) = 5.1$, $c(8,11) = 6$, $c(9,10) = 1$, $c(9,11) = 2$, $c(9,12) = 5.9$, $c(10,11) = 6$, $c(10,12) = 3$, $c(11,12) = 4.7$.



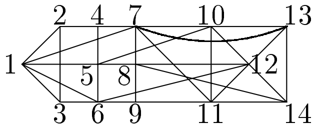
Вариант №14

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 14 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2.4$, $c(1,3) = 3.5$, $c(2,3) = 3.7$, $c(2,5) = 1.8$, $c(2,7) = 4.1$, $c(2,8) = 3.9$, $c(3,4) = 1.4$, $c(3,6) = 1.5$, $c(4,5) = 7.3$, $c(4,6) = 6.2$, $c(4,7) = 4.6$, $c(5,6) = 1.8$, $c(5,8) = 5$, $c(6,7) = 7$, $c(6,8) = 8$, $c(6,9) = 9$, $c(7,8) = 1$, $c(7,9) = 5.6$, $c(7,10) = 7.4$, $c(7,13) = 1.3$, $c(8,9) = 4.8$, $c(8,11) = 0.5$, $c(8,13) = 3.5$, $c(9,10) = 9.1$, $c(9,11) = 3.8$, $c(9,12) = 2.5$, $c(10,11) = 0.4$, $c(10,13) = 7.6$, $c(11,12) = 4$, $c(12,13) = 8$, $c(12,14) = 9$, $c(13,14) = 6.7$.



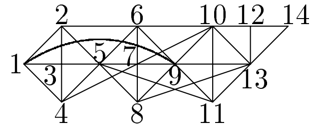
Вариант №15

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 14 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2.1$, $c(1,3) = 3.6$, $c(1,5) = 1.4$, $c(1,6) = 6$, $c(1,7) = 1$, $c(2,3) = 2.5$, $c(2,4) = 4.8$, $c(3,6) = 7$, $c(4,5) = 3$, $c(4,7) = 7$, $c(5,6) = 2$, $c(5,8) = 8$, $c(5,10) = 5$, $c(6,9) = 3$, $c(6,12) = 2$, $c(7,8) = 9$, $c(7,10) = 6$, $c(7,13) = 9$, $c(8,9) = 1$, $c(8,12) = 4$, $c(8,14) = 9.1$, $c(9,11) = 2$, $c(10,11) = 5.4$, $c(10,12) = 4$, $c(10,13) = 8.3$, $c(11,12) = 4.5$, $c(11,14) = 10$, $c(12,13) = 3$, $c(12,14) = 1$, $c(13,14) = 4.7$.



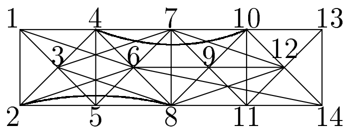
Вариант №16

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 14 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 3.5$, $c(1,3) = 4.7$, $c(1,4) = 2.8$, $c(1,9) = 3.1$, $c(2,3) = 4.5$, $c(2,5) = 2$, $c(2,6) = 1$, $c(3,4) = 3$, $c(3,5) = 6.9$, $c(4,5) = 7.2$, $c(4,7) = 8.3$, $c(5,6) = 9.1$, $c(5,7) = 7.4$, $c(5,8) = 5.6$, $c(6,7) = 1.2$, $c(6,9) = 3.6$, $c(6,10) = 7$, $c(7,8) = 4.5$, $c(7,9) = 1.9$, $c(8,9) = 4.7$, $c(8,13) = 7.2$, $c(9,10) = 2.9$, $c(9,11) = 2$, $c(9,13) = 3$, $c(10,11) = 7$, $c(10,12) = 6.5$, $c(10,13) = 4.3$, $c(11,13) = 5.2$, $c(12,13) = 6.7$, $c(12,14) = 8.3$, $c(13,14) = 5.3$.



Вариант №17

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 14 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1$, $c(1,3) = 2$, $c(1,4) = 1$, $c(1,6) = 4$, $c(2,3) = 2$, $c(2,5) = 7$, $c(2,6) = 3$, $c(2,8) = 5$, $c(3,4) = 6$, $c(3,5) = 7$, $c(3,7) = 3$, $c(3,8) = 4$, $c(4,5) = 5$, $c(4,6) = 5$, $c(4,7) = 8$, $c(4,10) = 2$, $c(5,6) = 1$, $c(5,8) = 5$, $c(6,7) = 3$, $c(6,8) = 6$, $c(6,9) = 7$, $c(6,14) = 4$, $c(7,8) = 4$, $c(7,9) = 5$, $c(7,10) = 1$, $c(7,12) = 2$, $c(8,9) = 3$, $c(8,11) = 3$, $c(8,12) = 6$, $c(9,10) = 5$, $c(9,11) = 4$, $c(9,12) = 7$, $c(10,12) = 3$, $c(10,13) = 2$, $c(11,12) = 1$, $c(11,14) = 4$, $c(12,13) = 3$, $c(12,14) = 2$, $c(13,14) = 5$.

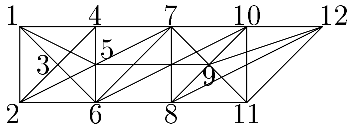


Вариант №18

0010010011010101000100101 четного веса.

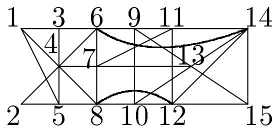
6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 12 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 1$, $c(1,3) =$

4.1, $c(1,4) = 0.5$, $c(1,5) = 3.2$, $c(2,3) = 9.5$, $c(2,5) = 2$, $c(2,6) = 5.2$, $c(3,4) = 6$, $c(3,6) = 2$, $c(4,5) = 5.3$, $c(4,7) = 4.5$, $c(5,6) = 1.8$, $c(5,9) = 4$, $c(6,7) = 3.1$, $c(6,8) = 3.2$, $c(6,10) = 4$, $c(7,8) = 1.8$, $c(7,10) = 5.8$, $c(7,11) = 6.2$, $c(8,9) = 2$, $c(8,11) = 2.5$, $c(8,12) = 4$, $c(9,10) = 7.3$, $c(9,11) = 8.1$, $c(9,12) = 9.7$, $c(10,11) = 1.3$, $c(10,12) = 7$, $c(11,12) = 2$.



Вариант №19

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 15 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,3) = 1.3$, $c(1,4) = 2.5$, $c(1,5) = 3.1$, $c(2,4) = 6.2$, $c(2,5) = 5.3$, $c(3,4) = 6.1$, $c(3,6) = 3.8$, $c(4,5) = 4.5$, $c(4,6) = 4.9$, $c(4,7) = 7.1$, $c(4,8) = 8.8$, $c(5,8) = 5.6$, $c(6,7) = 2.2$, $c(6,9) = 2.4$, $c(6,14) = 3$, $c(7,8) = 4.6$, $c(7,11) = 4$, $c(8,10) = 5.3$, $c(8,12) = 5.6$, $c(9,11) = 4.1$, $c(9,13) = 4.4$, $c(10,12) = 5$, $c(10,13) = 5.9$, $c(11,14) = 6$, $c(12,14) = 7.1$, $c(12,15) = 4$, $c(13,14) = 5.5$, $c(13,15) = 2.7$, $c(14,15) = 6$.



Вариант №20

6. Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 11 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа, если веса его ребер распределены следующим образом: $c(1,2) = 2.5$, $c(1,3) = 1.4$, $c(1,4) = 3.5$, $c(1,6) = 2.8$, $c(1,8) = 3.1$, $c(2,3) = 4.7$, $c(2,4) = 5.3$, $c(2,6) = 6.8$, $c(3,4) = 1.8$, $c(3,5) = 3.5$, $c(3,6) = 2.9$, $c(3,9) = 1.1$, $c(4,6) = 6.8$, $c(4,7) = 6.4$, $c(5,6) = 7.2$, $c(5,7) = 2.2$, $c(5,8) = 7.7$, $c(5,10) = 4$, $c(6,8) = 6.2$, $c(6,10) = 5$, $c(7,9) = 5.5$, $c(7,10) = 4.5$, $c(8,9) = 8$, $c(8,10) = 2.7$, $c(9,10) = 9$, $c(9,11) = 8.1$, $c(10,11) = 1$.