

1 Задачи для экзаменационных билетов по ДУ и Р 2002/2003 уч.год

1.1 ДУ

Указать тип дифференциального уравнения и найти его частное решение $y'(1+x^2) = 1 + y^2$ удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Указать тип дифференциального уравнения и решить его $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.

Найти и изобразить на чертеже интегральную кривую дифференциального уравнения $xy' - y = y^2 \ln x$, проходящую через точку $(1; 1)$.

Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение

$$y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$$

Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' = 2y'$. Существует ли решение при $y(0) = 0, y'(0) = 0$?

Найти частное решение уравнения $y'' = x + \cos x$, если $y(0) = 2; y'(0) = 5$.

Записать (схематично) общее решение уравнения $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 1 + xe^{-3x}$. Указать используемые теоремы.

Записать (схематично) вид общего решения уравнения $y'' - 2y' - 3y = x^2 e^{-x} + e^{3x}$.

1.2 Ряды числовые

Исследовать на сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Дан ряд $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 3} + \frac{1}{4^5 215} - \frac{1}{4^7 317} + \dots$. Записать его n -ое слагаемое. Вычислить $S \approx S_2$ и оценить погрешность этого приближенного равенства.

Доказать (используя свойства числовых рядов)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

1.3 Ряды степенные

Найти и изобразить область сходимости ряда $1 + 3x + \dots + (n-1)3^{n-1}x^{n-1} + \dots$.

Выразить в форме ряда $\int_0^x \frac{\sin t^3}{t} dt$ и указать область сходимости полученного ряда.

Найти радиус сходимости $\frac{\ln 2}{2^2}x^2 + \frac{\ln 3}{3^2}x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}x^{n+1} + \dots$

1.4 Применение степенных рядов

Вычислить, используя степенные разложения, с точностью 10^{-4} :

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Вычислить с погрешностью, не превышающей 10^{-3} величину $\sqrt[3]{130}$.

Используя разложение в ряд Маклорена, решить дифференциальное уравнение $y'' = -\sin y + x^3$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$. (Выписать первые 4 ненулевых члена ряда).

1.5 Ряды Фурье

Функцию $f(x) = 3 - x$, определённую на $[0; 2]$, продолжить нечётным и нечетным образом и разложить в ряд Фурье. Построить графики функции и нескольких первых частичных сумм. Попробуйте сравнить "качество" сходимости полученных ТРФ.

Найти и построить АЧХ и ФЧХ для функции $f(x) = \sin^2 x$ на $[-1; 1]$.

Разложить функцию $f(x) = \pi^2 - x^2$ в ряд Фурье на $[\pi/3; \pi/3]$. Ряд записать в комплексной форме.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sh} ax$ на $[-\pi; \pi]$.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x + \pi) = f(x)$. Доказать, что все её нечётные коэффициенты равны нулю.

1.6 Несобственный интеграл

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость в случае

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Параметрическая зависимость интегралов

Доказать, что функция $y(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}} dz$ удовлетворяет ДУ $xy'' + 2ny - xy = 0$.

Сформулировать используемые теоремы и обосновать возможность их применения.

Применяя правило Лейбница, вычислить интеграл:

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx$$

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$