

Утверждаю:.....

Зав. каф. ВМ и УМФ

Мартышко П.С.,

## Программа для экзамена по курсу “ ДУ и ряды”

(июнь 2004 г.)

гр. Фт-13013, Фт-13024, Фт-13025, Фт-13081, Фт-13082, Фт-13083к

### I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). Обыкновенные дифференциальные уравнения: понятие ДУ 1 порядка – различные формы записи; геометрическая интерпретация: поле направлений, изоклины. Задача Коши, начальные условия. Решения – частное, общее, особое. Интегральные кривые, интеграл (частный, общий). Приложения дифференциальных уравнений первого порядка в различных областях науки. Основные классы уравнений 1 порядка, интегрируемых в квадратурах и элементарные приемы интегрирования: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, линейное уравнение, уравнение Бернулли.

ДУ 2 порядка: определение, решение, начальные условия и их геометрический смысл, задача Коши, общее и частное решение. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, методы решения:  $y^{(n)} = f(x)$ ,  $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ ,  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ,  $d F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})/dx = 0$ ;  $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^n F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ .

Линейная зависимость функций и определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости функций. Достаточное условие линейной зависимости функций. Теорема существования ФСР ОЛДУ. Теорема о структуре общего решения ОЛДУ. Теорема о структуре общего решения НЛДУ. Принцип суперпозиции. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Построение ДУ по ФСР.

(формула Лиувилля-Остроградского); Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида. Приложения к описанию линейных моделей. Решение однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида (квазимногочлен). Уравнения Эйлера. Как найти второе частное решение ЛДУ 2, если одно известно.

### II. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

#### 1. Несобственные интегралы.

Интеграл на бесконечном промежутке: определение интеграла с бесконечным верхним пределом, бесконечным нижним пределом, оба предела бесконечные. Интеграл в смысле главного значения. Сходимость несобственного интеграла 1 рода (НИ 1). Вычисление по формуле Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям НИ 1. Признаки сходимости НИ 1 (сравнения). Интеграл от неограниченной функции - несобственный интеграл 2 рода (НИ 2). Сходимость и вычисление НИ 2.

#### 2. Интегралы с параметром.

Собственные интегралы с параметром. Основные свойства: непрерывность, возможность интегрирования и дифференцирования под знаком интеграла. Правило Лейбница.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, непрерывность, возможность интегрирования и дифференцирования под знаком интеграла. Правило Лейбница. ( $\Gamma$ -функция и ее свойства.)

### III. ТЕОРИЯ РЯДОВ

#### 1. Числовые ряды (ЧР).

Понятие ЧР, частичная сумма, сходимость и расходимость, сумма ряда. Связь ЧР и числовых последовательностей. Основные свойства сходящихся ЧР: отбрасывание членов ряда, умножение на число, сложение, необходимый признак сходимости. Расходимость гармонического ряда.

Признаки сходимости ЧР с положительными (неотрицательными) членами: сравнения, предельная форма сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши. Связь ЧР и НИ 1, интегральный признак сходимости.

Ряды с произвольными членами. Абсолютная сходимость. Теорема о сходимости абсолютно сходящихся рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов: перестановка членов, умножение на число, сложение (все б/д). Знакопередающиеся ряды, признак Лейбница, оценка остаточного члена.

4. Функциональные последовательности и ряды. Виды сходимости: поточечная, равномерная, в среднем. Область сходимости. Связь различных типов сходимости (б/д). Примеры. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся рядов: о непрерывности суммы и предельном переходе, о почленном интегрировании, о почленном дифференцировании.

5. Степенные ряды (СР) Определение степенного ряда: по степеням  $x$  и  $(x-a)$ . Теорема Абеля. Область сходимости СР, радиус сходимости. Равномерная и абсолютная сходимость СР. Свойства СР: непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование, единственность степенного разложения. Выражения для коэффициентов степенного ряда. Ряды Тейлора основных функций: *exp*, *sin*, *cos*, *tg*, *arcsin*, *arctg*, *ln*,  $(1+x)^a$ , разложение функций с использованием этих формул. Применение степенных разложений: для вычисления значений функций (погрешность ограничения и округления, оценка погрешности), для вычисления интегралов, для интегрирования ДУ.

#### 6. Тригонометрические ряды Фурье (ТРФ)

Тригонометрическая система функций, её свойства, тригонометрический многочлен. Вывод формул для коэффициентов Фурье, их свойства. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Разложение функции в ТР: периодической при  $T=2\pi$  и  $T=2\tau$ , четной и нечетной, непериодической (заданной на конечном промежутке). Сходимость ТРФ. Достаточные признаки сходимости ТРФ. Комплексная форма ТРФ. Спектральное разложение, АЧХ и ФЧХ, их построение. Интеграл и преобразование Фурье.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.

2. Л.Э.Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

3. Н.М. Матвеев Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям

4. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа/ под. Ред. А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича

5. <http://yourtutor.narod.ru/> и <http://webtutor.web.ur.ru/>