

IV. ИНТЕГРАЛЫ для группы Р 18036ВУ Крохин А.Л. 2008г.

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x = 0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

2. Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx ?$$

3. Пусть $f(t)$ – непрерывная функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

4. Найти $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$.

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt.$$

6. Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T . Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a.$$

7. Доказать, что если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^{+a} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^{+a} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c интеграл $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^4} dx$ выражается элементарными функциями.

Расчетные задания

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы (по частям).

$$1.1. \int (4 - 3x)e^{-3x} dx.$$

$$1.2. \int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx.$$

$$1.3. \int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

$$1.4. \int (4x - 2) \cos 2x dx.$$

$$1.5. \int (4 - 16x) \sin 4x dx.$$

$$1.6. \int (5x - 2)e^{3x} dx.$$

$$1.7. \int (1 - 6x)e^{2x} dx.$$

$$1.8. \int \ln(x^2 + 4) dx.$$

$$1.9. \int \ln(4x^2 + 1) dx.$$

$$1.10. \int (2 - 4x) \sin 2x dx.$$

$$1.11. \int \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1} dx.$$

$$1.12. \int e^{-2x} (4x - 3) dx.$$

$$1.13. \int e^{-3x} (2 - 9x) dx.$$

$$1.14. \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} dx.$$

$$1.15. \int \operatorname{arctg} \sqrt{3x - 1} dx.$$

$$1.16. \int \operatorname{arctg} \sqrt{5x - 1} dx.$$

$$1.17. \int (5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$1.18. \int (3x - 2) \cos 5x dx.$$

$$1.19. \int (x\sqrt{2} - 3) \cos 2x dx.$$

$$1.20. \int (4x + 7) \cos 3x dx.$$

$$1.21. \int (2x - 5) \cos 4x dx.$$

$$1.22. \int (8 - 3x) \cos 5x dx.$$

$$1.23. \int (x + 5) \sin 3x dx.$$

$$1.24. \int (2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$1.25. \int (4x + 3) \sin 5x dx.$$

$$1.26. \int (7x - 10) \sin 4x dx.$$

$$1.27. \int (\sqrt{2} - 8x) \sin 3x dx.$$

$$1.28. \int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

$$1.29. \int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

$$1.30. \int x \sin^2 x dx.$$

$$1.31. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы (по частям).

$$2.1. \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$2.2. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$2.3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$$

$$2.5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$2.7. \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$$

$$2.9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$$

$$2.11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$2.13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$2.15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$2.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$2.19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$2.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$2.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$2.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx.$$

$$2.27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx.$$

$$2.4. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$$

$$2.6. \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

$$2.8. \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$2.10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$$

$$2.12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$2.14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$2.16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$2.18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$2.20. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$2.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.24. \int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$$

$$2.26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx.$$

$$2.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

2.29. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$

2.30. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$

2.31. $\int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^{\frac{x}{2}} dx.$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы (замена, возможно разбить на сумму).

3.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

3.2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx.$

3.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

3.4. $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$

3.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

3.6. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

3.7. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$

3.8. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$

3.9. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$

3.10. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$

3.11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$

3.12. $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$

3.13. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx.$

3.14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$

3.15. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

3.16. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$

3.17. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$

3.18. $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$

3.19. $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx.$

3.20. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx.$

3.21. $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3} dx.$

3.22. $\int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$

$$3.23. \int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx.$$

$$3.24. \int \frac{x}{x^4+1} dx.$$

$$3.25. \int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$3.26. \int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$3.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$3.28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$3.29. \int \frac{x^3}{x^2+1} dx.$$

$$3.30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3.31. \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы (очевидные замены).

$$4.1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$4.2. \int_0^1 \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

$$4.3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$4.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}.$$

$$4.5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$4.6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$4.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$4.8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx.$$

$$4.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1}.$$

$$4.10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$4.11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$4.12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$4.13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$4.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx.$$

$$4.15. \int_0^{\sin^{-1} 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.16. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$4.17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$4.18. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$4.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$4.21. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$4.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$4.23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$4.24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$4.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$$

$$4.27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$4.28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$4.29. \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx.$$

$$4.30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$$

$$4.31. \int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Задача 5. Найти неопределенные интегралы (разложить на простейшие дроби, не вычисляя коэффициентов.)

$$5.1. \int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx.$$

$$5.2. \int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx.$$

$$5.3. \int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx.$$

$$5.4. \int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx.$$

$$5.5. \int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx.$$

$$5.6. \int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx.$$

$$5.7. \int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$5.8. \int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$$

$$5.9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$$

$$5.11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$$

$$5.13. \int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$5.15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$$

$$5.19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$5.21. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$5.23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

$$5.25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$5.27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

$$5.29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

$$5.31. \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

$$5.10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$5.12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

$$5.14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$$

$$5.16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$5.18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$$

$$5.20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$$

$$5.22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} dx.$$

$$5.24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

$$5.26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

$$5.28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

$$5.30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

Задача 7. . Вычислить определенные интегралы.

$$8.1. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$8.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$8.3. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}.$$

$$8.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx.$$

$$8.7. \int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}.$$

$$8.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}.$$

$$8.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}.$$

$$8.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

$$8.15. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

$$8.17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}.$$

$$8.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$$

$$8.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}.$$

$$8.23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$$

$$8.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$$

$$8.27. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}.$$

$$8.4. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}.$$

$$8.6. \int_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}.$$

$$8.8. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}.$$

$$8.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx.$$

$$8.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x) dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

$$8.14. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx.$$

$$8.16. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)(1+\cos x)}.$$

$$8.18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$$

$$8.20. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1-\sin x) dx}{\cos x(1+\cos x)}.$$

$$8.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$$

$$8.24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$$

$$8.26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$$

$$8.28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$$

$$8.29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$$

$$8.30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

$$8.31. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

$$10.1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$10.2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.4. \int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) dx.$$

$$10.5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2) dx.$$

$$10.6. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$10.7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.10. \int_0^{2\pi} \cos^8(x/4) dx.$$

$$10.11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) dx.$$

$$10.12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.13. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$10.16. \int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) dx.$$

$$10.17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) dx.$$

$$10.18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$$

$$10.21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x \, dx.$$

$$10.22. \int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) \, dx.$$

$$10.23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) \, dx.$$

$$10.24. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.25. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \cos^8 x \, dx.$$

$$10.26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x \, dx.$$

$$10.27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.28. \int_0^{2\pi} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) \, dx.$$

$$10.29. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) \, dx.$$

$$10.30. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x \, dx.$$

$$10.31. \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx.$$

Задача 12. Вычислить определенные интегралы подходящей заменой.

$$12.1. \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} \, dx.$$

$$12.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

$$12.3. \int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2) \sqrt{25 + x^2}}.$$

$$12.4. \int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$$

$$12.5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}.$$

$$12.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} \, dx.$$

$$12.7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

$$12.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$$

$$12.9. \int_0^1 \frac{x^4 \, dx}{(2 - x^2)^{3/2}}.$$

$$12.10. \int_0^2 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

12.11. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

12.12. $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$

12.13. $\int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$

12.14. $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$

12.15. $\int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$

12.16. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$

12.17. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$

12.18. $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$

12.19. $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$

12.20. $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$

12.21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

12.22. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$

12.23. $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$

12.24. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$

12.25. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$

12.26. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$

12.27. $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$

12.28. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$

12.29. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

12.30. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

12.31. $\int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

14.1. $y = (x - 2)^3,$
 $y = 4x - 8.$

14.3. $y = 4 - x^2,$
 $y = x^2 - 2x.$

14.5. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$
 $x = 0, \quad x = 1.$

14.7. $y = \cos x \sin^2 x, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq \pi/2).$

14.9. $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, \quad y = 0,$
 $x = 1, \quad x = e^3.$

14.11. $y = (x + 1)^2,$
 $y^2 = x + 1.$

14.13. $y = x\sqrt{36 - x^2}, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq 6).$

14.15. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 0,$
 $x = \sqrt{3}.$

14.17. $x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0,$
 $y = \ln 2.$

14.19. $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0,$
 $x = 1.$

14.21. $x = (y - 2)^3,$
 $x = 4y - 8.$

14.2. $y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq 3).$

14.4. $y = \sin x \cos^2 x, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq \pi/2).$

14.6. $y = x^2\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq 2).$

14.8. $y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0,$
 $x = \ln 2.$

14.10. $y = \arccos x, \quad y = 0,$
 $x = 0.$

14.12. $y = 2x - x^2 + 3,$
 $y = x^2 - 4x + 3.$

14.14. $x = \arccos y, \quad x = 0,$
 $y = 0.$

14.16. $y = x^2\sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$

14.18. $y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq 2).$

14.20. $y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0,$
 $x = \pi/2, \quad x = -\pi/2.$

14.22. $y = \cos^5 x \sin 2x, \quad y = 0,$
 $(0 \leq x \leq \pi/2).$

$$14.23. \quad y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = 0, \\ x = 1.$$

$$14.25. \quad x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, \quad x = 0, \\ y = 1, \quad y = e^3.$$

$$14.27. \quad y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq 4).$$

$$14.29. \quad y = (x - 1)^2, \\ y^2 = x - 1.$$

$$14.31. \quad x = 4 - (y - 1)^2, \\ x = y^2 - 4y + 3.$$

$$14.24. \quad x = 4 - y^2, \\ x = y^2 - 2y.$$

$$14.26. \quad y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, \quad y = 0, \\ x = 2, \quad x = 1.$$

$$14.28. \quad x = \sqrt{4 - y^2}, \quad x = 0, \\ y = 0, \quad y = 1.$$

$$14.30. \quad y = x^2 \cos x, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2).$$

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$15.1. \quad \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.2. \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.3. \quad \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.4. \quad \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.5. \quad \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.6. \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}).$$

$$15.8. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}).$$

$$15.9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, \quad y \geq 3).$$

$$15.10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 4 \quad (x \geq 4).$$

$$15.11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 3 \quad (y \geq 3).$$

$$15.12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 9).$$

$$15.13. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 4 \quad (x \geq 4).$$

$$15.14. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \\ y = 4 \quad (y \geq 4).$$

$$15.15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 6).$$

$$15.16. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$$

$$15.17. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}).$$

$$15.18. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 15).$$

$$15.19. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1 \quad (x \geq 1).$$

$$15.20. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 4 \quad (y \geq 4).$$

$$15.21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \quad y \geq 1).$$

$$15.22. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1 \quad (x \geq 1).$$

$$15.23. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 12). \end{cases}$$

$$15.25. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.26. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \\ y = 5 \quad (y \geq 5). \end{cases}$$

$$15.30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

$$15.31. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}). \end{cases}$$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

$$16.1. r = 4 \cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$16.2. r = \cos 2\varphi.$$

$$16.3. \begin{cases} r = \sqrt{3} \cos \varphi, & r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$16.4. r = 4 \sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$16.5. \begin{cases} r = 2 \cos \varphi, & r = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$16.6. r = \sin 3\varphi.$$

$$16.7. r = 6 \sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$16.8. r = \cos 3\varphi.$$

- $r = \cos \varphi,$
 16.9. $r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4),$
 $(-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$
- $r = \sin \varphi,$
 16.10. $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$
 $(0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$
- 16.11. $r = 6 \cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$
- 16.12. $r = 1/2 + \sin \varphi.$
- $r = \cos \varphi, \quad r = \sin \varphi,$
 16.13. $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$
- $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$
 16.14. $r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4),$
 $(\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$
- 16.15. $r = \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi.$
- 16.16. $r = \sin \varphi, \quad r = 2 \sin \varphi.$
- 16.17. $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$
- 16.18. $r = 1/2 + \cos \varphi.$
- 16.19. $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$
- 16.20. $r = (5/2) \sin \varphi, \quad r = (3/2) \sin \varphi.$
- 16.21. $r = (3/2) \cos \varphi, \quad r = (5/2) \cos \varphi.$
- 16.22. $r = 4 \cos 4\varphi.$
- 16.23. $r = \sin 6\varphi.$
- 16.24. $r = 2 \cos \varphi, \quad r = 3 \cos \varphi.$
- 16.25. $r = \cos \varphi + \sin \varphi.$
- 16.26. $r = 2 \sin 4\varphi.$
- 16.27. $r = 2 \cos 6\varphi.$
- 16.28. $r = \cos \varphi - \sin \varphi.$
- 16.29. $r = 3 \sin \varphi, \quad r = 5 \sin \varphi.$
- 16.30. $r = 2 \sin \varphi, \quad r = 4 \sin \varphi.$
- 16.31. $r = 6 \sin \varphi, \quad r = 4 \sin \varphi.$