Лекции по математическому анализу

Лекция 11. Исследование функций

Крохин А.Л.

УрФУ—РИ-РтФ

01.09.2010

Цель — по заданному аналитическому выражению установить основные свойства функции, нарисовать график функции.
Под "графиком" мы будем понимать рукописный рисунок, где на фоне системы координат изображается линия, форма которой отображает в наглядной форме полученные свойства.

Основными мы будем считать свойства функции, перечисленные в известной со школы "схемы исследования". Рассмотрим более подробно теоретическое обоснование методов изучения свойств функций с помощью ее производных.

Изменение значения функции с ростом значения ее аргумента может происходить монотонно. Это обобщающий термин, относящийся к некоторому промежутку области определения. Различают следующие виды монотонности: постоянство, возрастание (строгое), неубывание, убывание(строгое), невозрастание.

Определение. Функция называется монотонно возрастающей(убывающей) на промежутке, если большему значению аргумента на этом промежутке соответствует большее(меньшее) значение функции.

$$f \nearrow \left(\searrow \right) \text{ на } [a,\, b]:\; a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Big(f(x_1) > f(x_2) \Big)$$

Если неравенство для значений функции строгое, то часто говорят о **строгой** монотонности — строго возрастает или убывает. Если же неравенство нестрогое, то, записав в определении $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, получим *неубывание*, а при $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ — *невозрастание*.

Theorem

Пусть функция f определена и непрерывна в промежутке $\mathcal{X}$ и внутри него имеет конечную производную $f'(x)$. Н и Д условием монотонности является

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ для неубывания, } f'(x) \leqslant 0 \text{ для невозрастания,}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция монотонно возрастает. Тогда

$$f(x+\Delta x) \geqslant f(x), \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

при $\Delta x > 0 \Rightarrow f'(x) \geqslant 0 \; x \in \mathcal{X}$.

Достаточность

По формуле Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1) \quad x_1 < \xi < x_2.$$

$$f'(\xi) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

$\square$

Theorem

(Достаточное условие строгой монотонности) Пусть функция f определена и непрерывна в промежутке $(a,\, b)$ и внутри него имеет конечную производную $f'(x)$.

$$\forall x \in (a,\, b)\ f'(x) > 0 \left(< 0 \text{ для убывания}\right) \Rightarrow f \ \nearrow (\searrow) \text{ на } (a,\, b) \qquad (1)$$

Theorem

(Достаточное условие строгой монотонности) Пусть функция f определена и непрерывна в промежутке $(a,\, b)$ и внутри него имеет конечную производную $f'(x)$.

$$\forall x \in (a,\, b)\ f'(x) > 0\ \big(< 0 \text{ для убывания}\big) \Rightarrow f\ \nearrow (\searrow) \text{ на } (a,\, b) \qquad (1)$$

Строгая монотонность возможна, если производная обращается в нуль разве что в отдельных точках. Например, $f(x) = x^3$.

Theorem

(Достаточное условие строгой монотонности) Пусть функция f определена и непрерывна в промежутке $(a,\, b)$ и внутри него имеет конечную производную $f'(x)$.

$$\forall x \in (a,\, b)\ f'(x) > 0\ \Big(< 0 \text{ для убывания}\Big) \Rightarrow f\ \nearrow (\searrow) \text{ на } (a,\, b) \qquad (1)$$

Строгая монотонность возможна, если производная обращается в нуль разве что в отдельных точках. Например, $f(x) = x^3$.
Иначе говоря, **необходимым** условием строгой монотонности на $(a,\, b)$, в добавление к указанным в Теореме 1, было бы — $f'(x)$ не обращается в 0 **тождественно** ни на каком промежутке, целиком лежащем в $(a,\, b)$.

Заметим, что из того, что $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) < f(x_2)$ для некоторых точек, не следует ее монотонное возрастание или же убывание.

Для двух точек $x_1 = \dfrac{\pi}{6} < \pi = x_2$ $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} > 0 = \sin\pi$. Однако функция не является убывающей на промежутке $[0, \pi]$.

Максимумы и минимумы

Максимумы и минимумы

Пусть функция определена в окрестности точки x_0. Если значение функции в самой точке больше (меньше), чем в соседних точках — x_0 будет точкой локального максимума (минимума).

$$f(x_0) > f(x),\ x \in S'(x_0) \text{— "выколотая" окрестность}$$

Максимумы и минимумы

Пусть функция определена в окрестности точки x_0. Если значение функции в самой точке больше (меньше), чем в соседних точках — x_0 будет точкой локального максимума (минимума).

$$f(x_0) > f(x),\ x \in S'(x_0) \text{— "выколотая" окрестность}$$

Необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции следует из теоремы Ферма, это — $f'(x_0) = 0$.
Однако в точке локального экстремума производная может и не существовать.

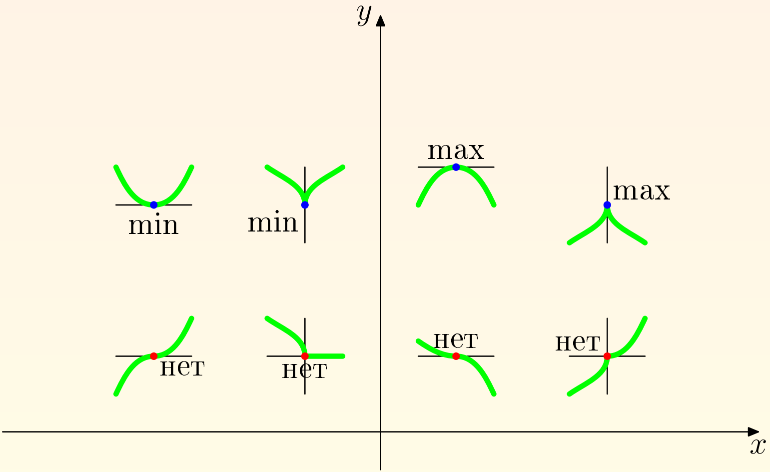
Максимумы и минимумы

Пусть функция определена в окрестности точки x_0. Если значение функции в самой точке больше (меньше), чем в соседних точках — x_0 будет точкой локального максимума (минимума).

$$f(x_0) > f(x),\ x \in S'(x_0)\text{— "выколотая" окрестность}$$

Необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции следует из теоремы Ферма, это — $f'(x_0) = 0$.
Однако в точке локального экстремума производная может и не существовать.

Достаточное условие применяется в т.н. **критических** точках, т.е. в тех, где производная обращается в нуль или не существует.
Это условие можно сформулировать так. *Если производная при переходе через критическую точку меняет знак — это точка локального экстремума.*



Примеры критических точек, к которых выполняется или не выполняется достаточное условие существования локального экстремума.

Рассмотрим этот вопрос более строго.

Theorem

(Достаточное условие существования локального экстремума)
Пусть:

- f *непрерывна на* (a, b) *и дифференцируема в некоторой окрестности* $S(x_0) \subset (a, b)$, *кроме быть может самой точки* x_0;
- $f'(x_0) = 0$ *или не существует;*
- $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0 \quad x_1 < x_0 < x_2$.

  Тогда точка x_0 *— точка локального экстремума.*

Theorem

(Достаточное условие существования локального экстремума)
Пусть:

- f *непрерывна на* (a, b) *и дифференцируема в некоторой окрестности* $S(x_0) \subset (a, b)$, *кроме быть может самой точки* x_0;
- $f'(x_0) = 0$ *или не существует;*
- $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0 \quad x_1 < x_0 < x_2$.
  Тогда точка x_0 *— точка локального экстремума.*

Доказательство.

Рассмотрим только один случай — максимум.
Пусть слева от x_0 $f'(x) > 0$. Тогда функция возрастает и $\Delta f(x) > 0$, $f(x_0) > f(x_1)$, $x_1 < x_0$. Из условия следует, что справа от x_0 $f'(x) < 0$, функция убывает, $\Delta f(x) < 0$, $f(x_2) < f(x_0)$, $x_0 < x_2$.
Значит, сама точка x_0 — точка локального максимума. $\square$

Форма графика

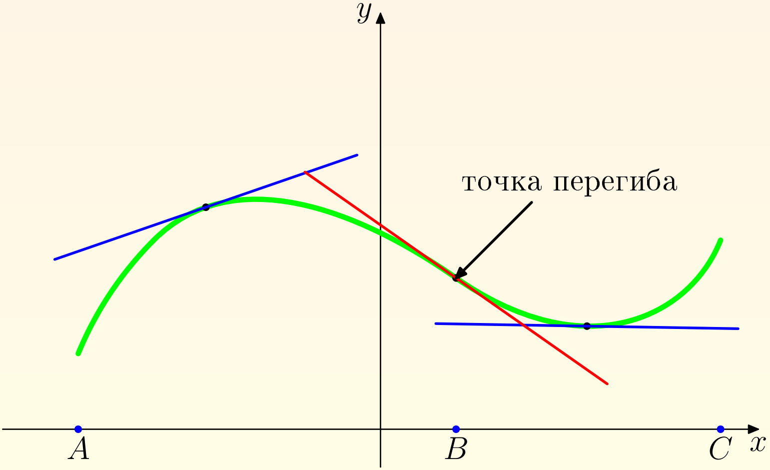
Определение. График функции будем называть **выпуклым** вверх на промежутке (a, b), если точки на касательной, проведенной в произвольной точке графика $(x_0, f(x_0))$, лежат выше точек графика с соответствующими абсциссами[1].

Определение. График функции будем называть **выпуклым вниз** (вогнутым) на промежутке (a, b), если точки на касательной, проведенной в произвольной точке графика $(x_0, f(x_0))$, лежат ниже точек графика с соответствующими абсциссами.

Два соседних промежутка с различным типом выпуклости разделяются точкой перегиба. Касательная, проведенная в данной точке пересекает график функции.

[1] За исключением самой точки касания.

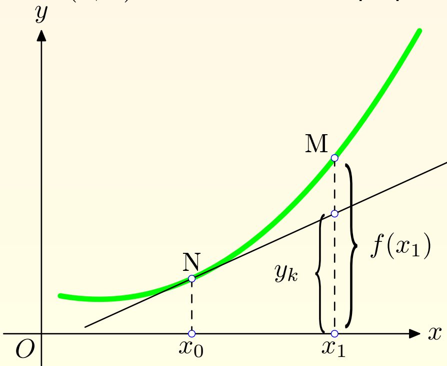
На рисунке проведена касательная к графику: слева касательная выше графика, справа — ниже.



Theorem

Если функция $f(x)$ имеет на $(a,\, b)$ конечную вторую производную и $f''(x) > 0,\ \Big(f''(x) < 0\Big) x \in (a,\, b)$, то график функции выпуклый вниз(вогнутый) на этом интервале.
При $f''(x) < 0\ x \in (a,\, b)$ — выпуклый вверх.

Сравним значения ординат двух точек с одинаковой абсциссой $x_1 \in (a,\, b)$, одна лежит на графике, вторая — на касательной.



Это означает, что $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 < 0 \Rightarrow f''(\xi) < 0.$$

Ясно, что характер выпуклости определяется знаком второй производной. $f''(x) > 0$ — выпуклость вниз(вогнутость), $f''(x) < 0$ — выпуклость вверх.

Асимптоты графика

Определение. Прямая линия Γ называется асимптотой линии L(графика функции), если расстояние от точки M линии L до прямой Γ стремится к нулю при удалении точки M от начала координат.

Если асимптота существует, то она дает представление о виде графика и о характере поведения функции за пределами той области, в которой мы этот график непосредственно изобразили на чертеже. Различают вертикальные и наклонные (в т. ч. горизонтальные) асимптоты.
Вертикальные асимптоты соответствуют точкам разрыва второго рода и имеют уравнение $x = x_0$, где x_0 — точка разрыва II рода. Действительно, в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0 + 0} f(x)$ бесконечный. А это значит, что при увеличении по модулю ординаты точки графика $|f(x)|$ расстояние до асимптоты $|x - x_0|$ убывает, стремясь к нулю.

Если уравнение асимптоты (наклонной!) записать в виде $y = kx + b$, то Н и Д условиями ее существования будут:

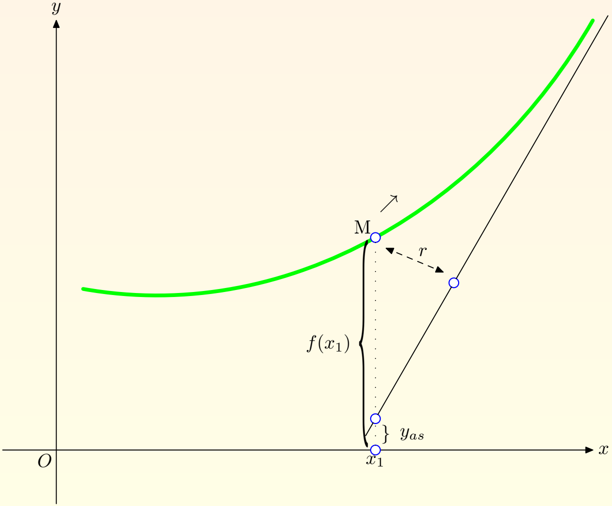
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\infty}\Big(f(x) - kx\Big) = b. \qquad (2)$$

Пределы односторонние, отдельно $x \to +\infty$, отдельно — $x \to -\infty$. Действительно, пусть функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Разность ординат точек на графике и прямой есть бесконечно малая. Ведь она пропорциональна расстоянию от точки графика до асимптоты, которое по определению имеет предел 0 при $x \to \infty$.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),\ \lim \alpha(x) = 0 \text{ при } x \to +\infty$$

Ведь она пропорциональна расстоянию от точки графика до асимптоты.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),\ \lim \alpha(x) = 0 \text{ при } x \to +\infty$$



Поэтому

Докажем достаточность. Пределы (2) существуют, значит,

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \text{ или } f(x) - (kx + b) = \alpha(x). \qquad (3)$$

Поскольку $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to \infty$, то прямая $y = kx + b$ — асимптота.