Применение определенного интеграла

А.Л.Крохин

Уральский федеральный университет

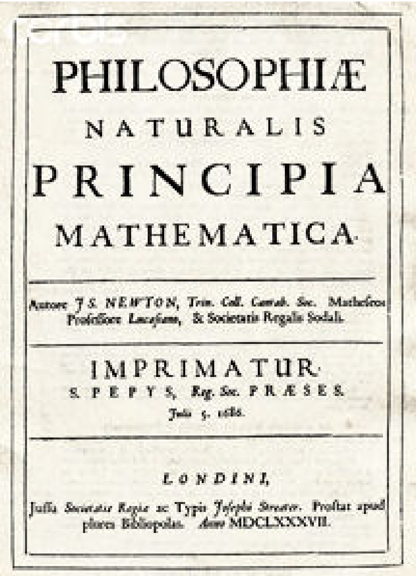
11.11.10

1. Из истории
   - Что действительно писал Ньютон об интегрировании?
   - Как находил площадь параболического сегмента Архимед

Most of us learn about math from modern textbooks, with modern notation and often divorced from the historical original. No wonder people think math is a modern invention that's only designed to torture students!

Сэр Исаак Ньютон

Newton написал свой труд Principia на латыни. Для математиков того времени 19 век) это было обычное дело — писать на латинском языке. Хотя другие ученые писали на своих родных языках или на наиболее распространенных (French, German and English).



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

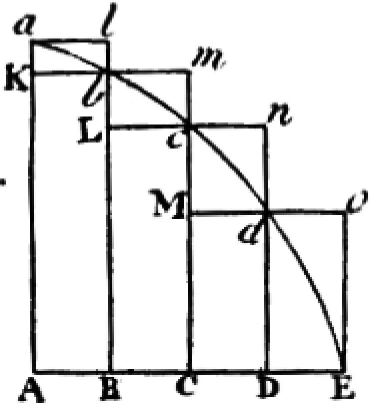
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Это обложка его книги.

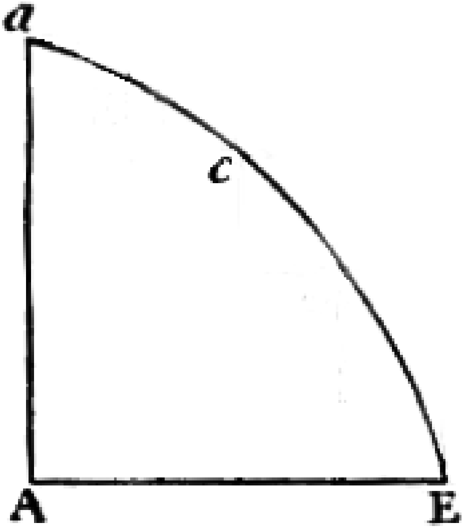
LEMMA II.

If in any figure AacE (Pl. 1. Fig. 6.) *terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE, *there be inſcrib'd any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c. comprehended under equal baſes* AB, BC, CD, *&c. and the ſides* Bb, Cc, Dd, *&c. parallel to one ſide* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c. are compleated. Then if the breadth of thoſe parallelograms be ſuppos'd to be diminiſhed, and their number to be augmented* in infinitum: *I ſay that the ultimate ratio's which the inſcrib'd figure* AKbLcMdD, *the circumſcribed figure* AalbmcndoE, *and curvilinear figure* AabcdE, *will have to one another, are ratio's of equality.*

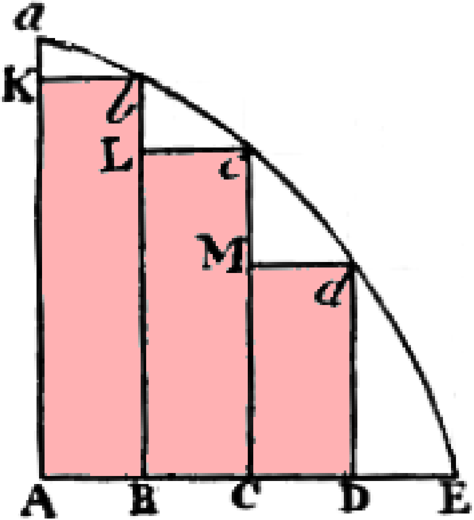
Fig. 6.
p. 42.



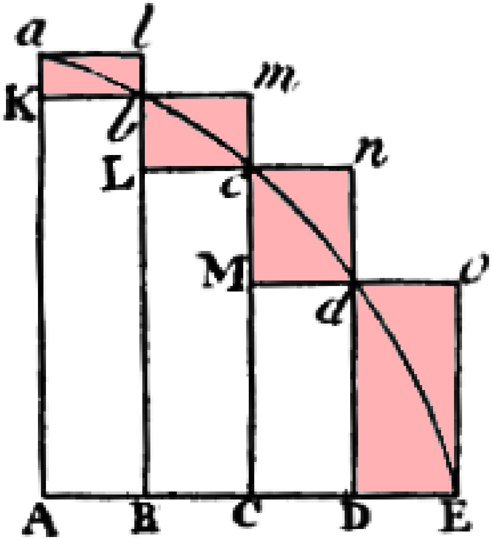
If in any figure AacE (Pl. 1. Fig. 6.) *terminated by the right lines* A a, AE, *and the curve* acE


a
c
A
E

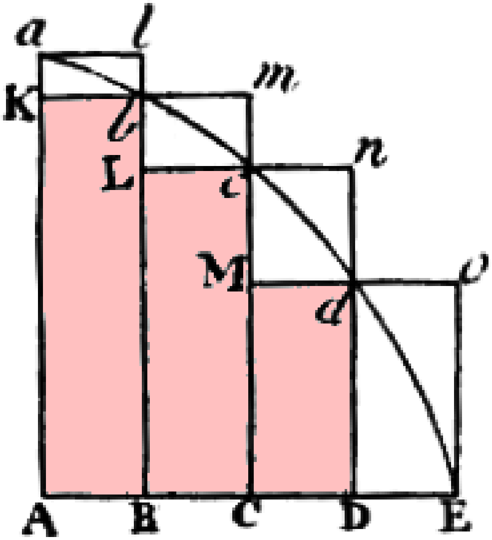
there be inſcrib'd any number of paral-lelograms A b, B c, C d, *&c. comprehended under equal baſes* A B, B C, C D, *&c. and the ſides* B b, C c, D d, *&c. parallel to one ſide* A a *of the figure*

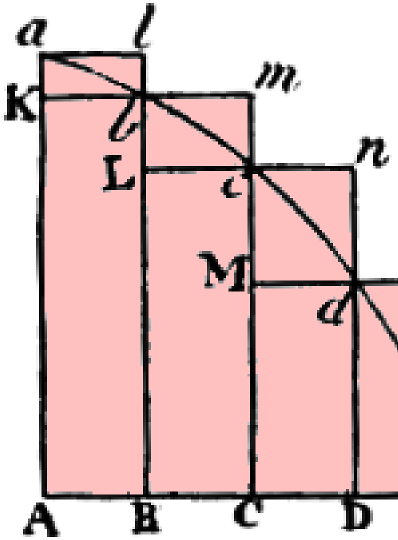

a
K
b
L
c
M
d
A
B
C
D
E

and the parallelo-grams aKbl, bLcm, cMdn, *&c. are compleated.*

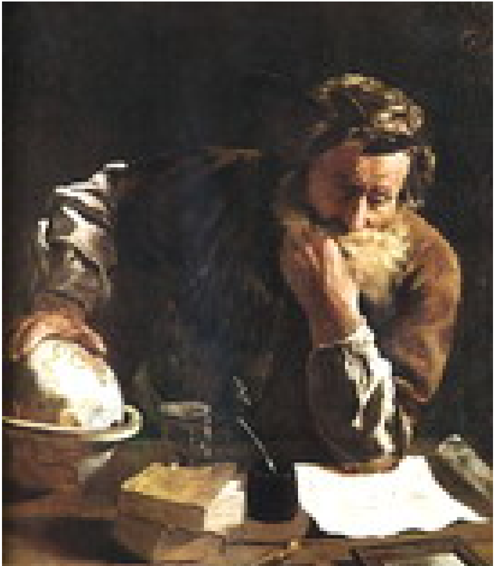

a
l
m
K
b
n
L
c
M
o
d
A
B
C
D
E

Then if the breadth of thoſe parallelograms be ſuppos'd to be diminiſhed, and their number to be augmented in infinitum: *I ſay that the ultimate ratio's which the inſcrib'd figure* AKbLcMdD, *the circumſcribed figure* AalbmcndoE, *and curvilinear figure* AabcdE, *will have to one another, are ratio's of equality.*

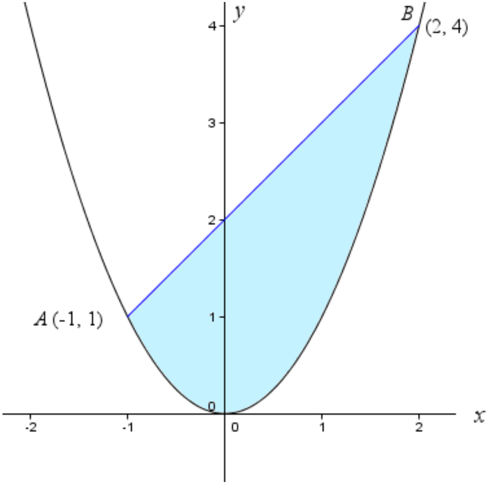

a
l
m
n
o
K
b
L
c
M
d
A
B
C
D
E


a
l
m
n
K
b
L
c
M
d
A
B
C
D

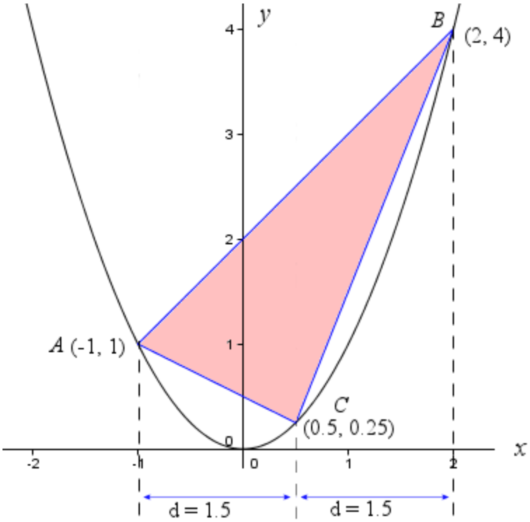
Архимед из Сиракуз

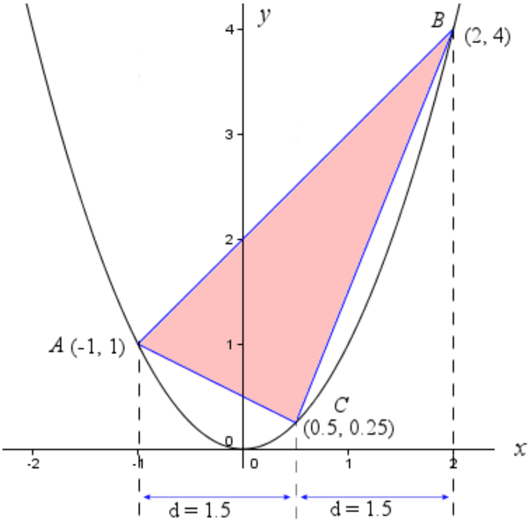


Архимед из Сиракуз (287 BC – 212 BC) был греческим математиком, физиком, инженером, изобретателем и астрономом. Считается одним из величайших ученых античности.

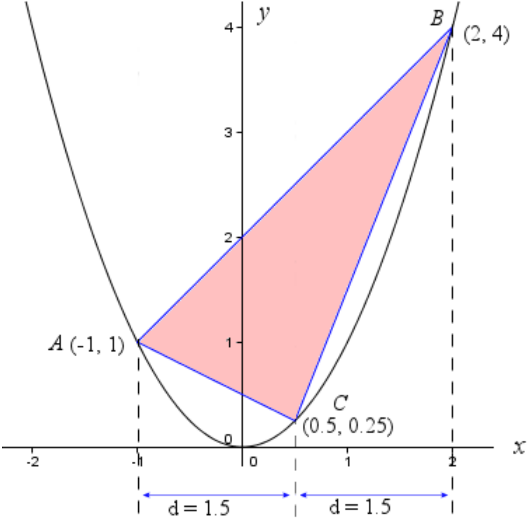


Параболическим сегментом называют часть плоскости, ограниченную параболой и хордой (на рис. закрашено синим цветом).

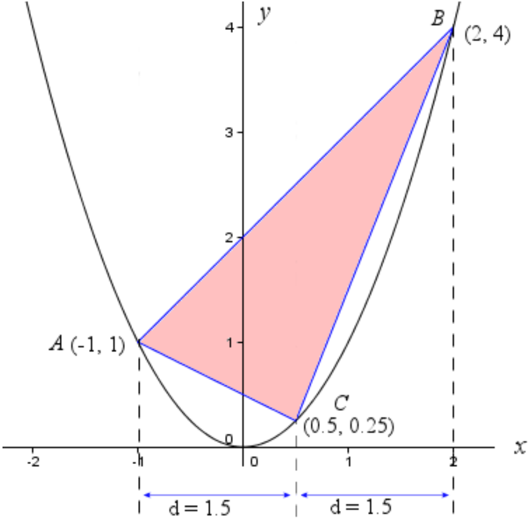

y
4
3
2
1
0
B
(2, 4)
A (-1, 1)
C
(0.5, 0.25)
x
-2
-1
0
1
2
d = 1.5
d = 1.5



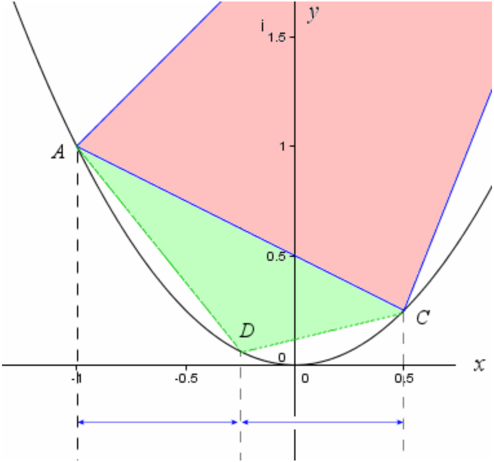
Возьмем на параболе точку C, абсцисса которой равна полусумме абсцисс точек A и B (концов хорды).



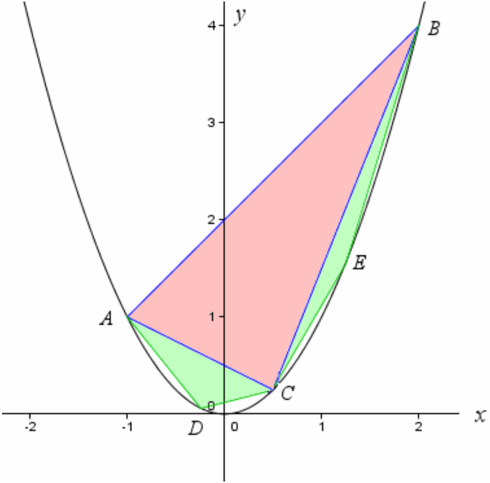
Возьмем на параболе точку C, абсцисса которой равна полусумме абсцисс точек A и B (концов хорды). Затем построим треугольник ABC.



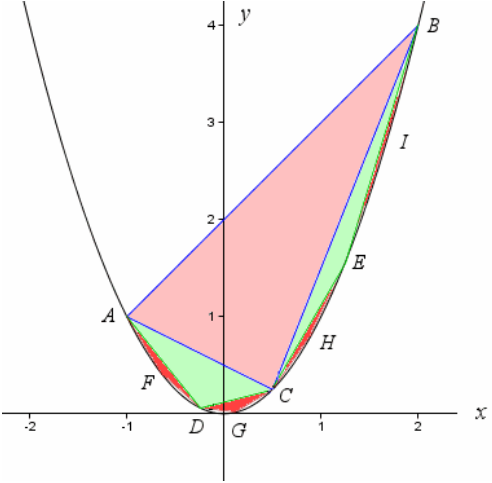
Возьмем на параболе точку C, абсцисса которой равна полусумме абсцисс точек A и B (концов хорды). Затем построим треугольник ABC. Архимед доказал, что площадь этого треугольника составляет 3/4 площади сегмента.



Надо сказать, что он пользовался чисто геометрическими методами, ведь понятие о системе координат возникло лишь в 17 веке! В полученные два "белых" сегмента впишем два треугольника, аналогично предыдущему.



Отношение площадей сегментов и вписанных треугольников соответственно 4/3, как уже отмечалось. Исходный сегмент неплохо покрывается тремя треугольниками. Их суммарная площадь является приближением к "истинной" площади сегмента.



Продолжим процедуру вписывания, добавив еще четыре треугольника. Этот процесс можно продолжать неограниченно долго. Площади треугольников уменьшаются на каждом шаге в 8 раз. Основания в два раза, а высоты — в 4 раза. Мы это можем сосчитать, а каково было Архимеду!

Если площадь первого треугольника S, то суммарная площадь растет как сумма членов геометрической прогрессии

$$S + 2\frac{S}{8} + 4\frac{S}{8 \cdot 8} + \dots$$

Прогрессия убывающая, воспользуемся известной школьной формулой

$$\frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S.$$

Итак, площадь сегмента составила 4/3 площади треугольника.
$4/3 \cdot 1/2 \cdot 3 \cdot 2.25 = 3.38.$
Мы, живущие в 21 веке, получаем площадь намного быстрее.

$$\int_{-1}^{2} \Big(f_1(x) - f_2(x)\Big)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \Big((x+2) - x^2\Big)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4.5.$$