Индивидуальные домашние задания

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Задача 1. Построить линии уровня скалярного поля $u = u(x, y)$; убедиться, что вектор $\mathrm{grad} u(M_0)$ ортогонален соответствующей линии уровня (касательной к линии, проходящей через точку M_0)

1. $u(x, y) = x^2 + 2y^2,\ M_0(4, 2);$
2. $u(x, y) = xy,\ M_0(2, 3);$
3. $u(x, y) = 2x^2 + y^2,\ M_0(1, 3);$
4. $u(x, y) = x^2 - 2x + y^2,\ M_0(1, 1);$
5. $u(x, y) = -x^2 + 2y^2,\ M_0(-4, 4);$
6. $u(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 9y^2}},\ M_0(4, 1);$
7. $u(x, y) = \dfrac{1}{4x^2 + y^2},\ M_0(2, 3);$
8. $u(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ M_0(1/2, -1/2);$
9. $u(x, y) = \ln x^2 + y^1 + 1,\ M_0(0, 0);$
10. $u(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2),\ M_0(-1, 1);$

Задача 2. Найти производную скалярного поля u в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$.

1. $u(x, y, z) = x^2y - \sqrt{xy + z^2},\ \vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k},\ M_0(1; 5; -2);$
2. $u(x, y, z) = x(\ln y - \operatorname{arctg} z),\ \vec{l} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k},\ M_0(-2; 1; -1);$
3. $u(x, y, z) = \ln(3 - x62) + xy^2z,\ \vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},\ M_0(1; 3; 2);$
4. $u(x, y, z) = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz},\ \vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k},\ M_0(\pi/2; 3\pi/2; 3);$
5. $u(x, y, z) = x^2y^2z - \ln(z - 1),\ \vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k},\ M_0(1; 1; 2);$
6. $u(x, y, z) = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2},\ \vec{l} = 0\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},\ M_0(1; -3; 4);$
7. $u(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x + \sqrt{y}},\ \vec{l} = 2\vec{i} + \vec{k},\ M_0(4; 1; -2);$
8. $u(x, y, z) = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2},\ \vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},\ M_0(1; 1; 0);$
9. $u(x, y, z) = 2\sqrt{x + y} + y \operatorname{arctg} z,\ \vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{k},\ M_0(3; -2; 1);$
10. $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) + xyz,\ \vec{l} = \vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k},\ M_0(1; -1; 2);$

Задача 3. Показать, что поле вектора $\vec{F}(x,\,y,\,z)$ потенциальное и найти потенциал поля.

1. $\vec{F}=\left(-\dfrac{3y}{x^4}+\dfrac{4x^3}{y^2}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2x^4}{y^3}+3y^2\right)\vec{j}-5z^4\vec{k};$

2. $\vec{F}=\left(4x^3e^y-\dfrac{5z^3}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^4e^y-1\right)\vec{j}+\left(\dfrac{15z^2}{x}-1\right)\vec{k};$

3. $\vec{F}=-\dfrac{yz^4}{x^2}\vec{i}+\left(\dfrac{z^4}{x}+ze^{zy}+6y^5\right)\vec{j}+\left(\dfrac{4yz^3}{x}+ye^{zy}\right)\vec{k};$

4. $\vec{F}=\left(y^4+zx^{z-1}+2yx^{y-1}\right)\vec{i}+\left(4xy^3+2x^y\ln x\right)\vec{j}+\left(x^z\ln x+1\right)\vec{k};$

5. $\vec{F}=z\vec{i}+(z-x)\vec{j}+x\vec{k};$

6. $\vec{F}=\dfrac{10x^4}{y}\vec{i}+\left(\dfrac{z}{1+y^2z^2}-\dfrac{2x^5}{y^2}+\dfrac{2y}{z}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{y}{1+y^2z^2}-1-\dfrac{y^2}{z^2}\right)\vec{k};$

7. $\vec{F}=\left(-yz\sin x-\dfrac{3}{z}\right)\vec{i}+(z\cos x+1)\vec{j}+\left(y\cos x+\dfrac{3x}{z^2}+1\right)\vec{k};$

8. $\vec{F}=-\dfrac{4x^3}{z^3}\vec{i}+(z\cos y-1)\vec{j}-\left(\sin y+\dfrac{3x^4}{z^4}+2z\right)\vec{k};$

9. $\vec{F}=\left(ze^{4y}-\dfrac{3z^3}{x^4}\right)\vec{i}+\left(4xze^{4y}-5y^4\right)\vec{j}+\left(xe^{4y}+\dfrac{3z^2}{x^3}+1\right)\vec{k};$

10. $\vec{F}=\dfrac{1}{x+yz}\vec{i}+\left(\dfrac{z}{x+yz}+\dfrac{5}{y}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{y}{x+yz}+1\right)\vec{k};$

Задача 4. Найти работу силы $\vec{F}$ при движении точки по траектории (L) от точки M до точки N.

1. $\vec{F}=\left(x^2-2y\right)\vec{i}+\left(y^2-2x\right)\vec{j}$, $(L):$ отрезок $M(-4;0)$, $N(0;2)$;

2. $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\vec{j}$, $(L): 2-x^2/8=y$, $M(-4;0)$, $N(0;2)$;

3. $\vec{F}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}$, $(L):\ x^2+y^2=4\,(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$, $M(2;0)$, $N(0;2)$;

4. $\vec{F}=x^2y\vec{i}-y\vec{j}$, $(L):$ отрезок прямой $M(-1;0)$, $N(0;1)$;

5. $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+9x-y)\vec{j}$, $(L):\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1\,(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$, $M(1;0)$, $N(0;3)$;

6. $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}$, $(L): y=\begin{cases} x, & 0\leqslant\ x\leqslant 1,\\ 2-x & 1\leqslant\ x\leqslant 2\end{cases}$ $M(2;0)$, $N(0;0)$;

7. $\vec{F}=xy\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}$, $(L):\ x^2+y^2=1\quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$, $M(1;0)$, $N(0;1)$;

8. $\vec{F}=(x^2+y^2)\cdot(\vec{i}+2\vec{j})$, $(L):\quad x^2+y^2=R^2\quad (y\geqslant 0), M(R;0)$, $N(-R;0)$;

9. $\vec{F} = \left(x + y\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\vec{i} + \left(y - x\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\vec{j}$, $(L):\ x^2+y^2=1 \quad (y \geqslant 0), M(1;0),\ N(-1;0)$;

10. $\vec{F} = x^2y\cdot\vec{i} - xy\cdot\vec{j}$, $(L):\ x^2+y^2=1 \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(2;0)$, $N(0;2)$;

Задача 5. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль контура Γ в направлении возрастания параметра.

1. $\vec{F} = (y-x)\cdot\vec{i} + (z-x)\cdot\vec{j} + (x-y)\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2(1-\cos t)$;
2. $\vec{F} = (y-z)\cdot\vec{i} + (z-x)\cdot\vec{j} + (x-y)\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=4\cos t,\ y=4\sin t,,\ z=1-\cos t$;
3. $\vec{F} = 2y\cdot\vec{i} - 3x\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=2-2\cos t-2\sin t$;
4. $\vec{F} = 2z\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=1$;
5. $\vec{F} = y\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=3$;
6. $\vec{F} = x\cdot\vec{i} + z^2\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=\cos t,\ y=2\sin t,\ z=2\cos t-2\sin t-1$;
7. $\vec{F} = 3y\cdot\vec{i} - 3x\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=3-3\cos t-3\sin t$;
8. $\vec{F} = 6z\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j} + xy\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=3$;
9. $\vec{F} = -z\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j} + xz\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=5\cos t,\ y=5\sin t,\ z=4$;
10. $\vec{F} = (y-z)\cdot\vec{i} + (z-x)\cdot\vec{j} + (x-y)\cdot\vec{k}$, $\Gamma: x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=2(1-\cos t)$.

Задача 6. Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ).

1. $\vec{F} = 2\pi x\cdot\vec{i} + (7y+2)\cdot\vec{j} + 7\pi z\cdot\vec{k}$, $P: x+y/2+z/3=1$;
2. $\vec{F} = (2x+1)\cdot\vec{i} - y\cdot\vec{j} + 3\pi z\cdot\vec{k}$, $P: x/3+y+2z=1$;
3. $\vec{F} = \vec{i} + 5y\cdot\vec{j} + 11\pi z\cdot\vec{k}$, $P: x+y+z/3=1$;
4. $\vec{F} = 5\pi x\cdot\vec{i} + (9y+1)\cdot\vec{j} + 4\pi z\cdot\vec{k}$, $P: x/2+y/3+z/2=1$;
5. $\vec{F} = 9\pi x\cdot\vec{i} + (5y+1)\cdot\vec{j} + 2\pi z\cdot\vec{k}$, $P: 3x+y+z/9=1$;
6. $\vec{F} = \pi y\cdot\vec{j} + (4-2z)\cdot\vec{k}$, $P: 2x+y/3+z/4=1$;
7. $\vec{F} = \pi x\cdot\vec{i} + \dfrac{\pi}{2}y\cdot\vec{j} + (4-2z)\cdot\vec{k}$, $P: x+y/3+z/4=1$;
8. $\vec{F} = 9\pi y\cdot\vec{j} + (7z=1)\cdot\vec{k}$, $P: x=y+z=1$;
9. $\vec{F} = (27\pi-1)x\cdot\vec{i} + (34\pi y+3)\cdot\vec{j} + 20\pi z\cdot\vec{k}$, $P: 3x+y/9+z=1$;
10. $\vec{F} = 4\pi x\cdot\vec{i} + 7\pi y\cdot\vec{j} + (2z+1)\cdot\vec{k}$, $P: 2x+y/3+2z=1$;

Задача 7.Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через замкнутую поверхность S(нормаль внешняя).

1. $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + xz \cdot \vec{k}, \quad S : z = x^2 + y^2,\ z = 1,\ x = 0,\ y = 0$ 1 октант;
2. $\vec{F} = (X^2 + y^2) \cdot \vec{i} + (y^2 + x^2) \cdot \vec{j} + (y^2 + z^2) \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 1;$
3. $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = 0,\ (z \geqslant 0);$
4. $\vec{F} = 3xz \cdot \vec{i} - 2x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}, \quad S : x + y + z = 2,\ x = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$
5. $\vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} + y^3 \cdot \vec{j} + z^3 \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1;$
6. $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = z^2,\ z = 4;$
7. $\vec{F} = (zx + y) \cdot \vec{i} + (xy - z) \cdot \vec{j} + (x^2 + yz) \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = 2,\ z = 0,\ z = 1;$
8. $\vec{F} = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2 y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 1,\ x = 0,\ y = 0$ (1 октант);
9. $\vec{F} = (x^2 + xy) \cdot \vec{i} + (y^2 + yz) \cdot \vec{j} + (z^2 + xz) \cdot \vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = z^2\ (z \geqslant 0);$
10. $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + 2zy \cdot \vec{j} + 2z^2\vec{k}, \quad S : x^2 + y^2 = 1 - z,\ x = 0;$

Задача 8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{F}$, принимая за контур интегрирования часть плоскости, "натянутой"на $(\mathcal{L})$.

1. $\vec{F} = (yz + x + 2y^2) \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x^2 + y62 = R^2, z = 0;$
2. $\vec{F} = y^2 z \cdot \vec{i} + xz^2 \cdot \vec{j} + x^2 y \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x + y^2 = 4,\ z = 2;$
3. $\vec{F} = yz^2 \cdot \vec{i} + zx^2 \cdot \vec{j} + xy^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x^2 + y^2 = 16,\ z = 4;$
4. $\vec{F} = (4x^2 + x^2 z) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} - 4z^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x^2 + y^2 = 9,\ y = 1;$
5. $\vec{F} = yz^2 \cdot \vec{i} + zx^2 \cdot \vec{j} + xy^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x^2 + y^2 = 9,\ z = 1;$
6. $\vec{F} = yz \cdot \vec{i} + (xz + 4x) \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : 4x^2 + y^2 = 4,\ z = 0;$
7. $\vec{F} = 3y^2 \cdot \vec{i} - 3z^2 \cdot \vec{j} + 3x^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$
8. $\vec{F} = z \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (x - y)^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x = b\cos t,\ z = b\sin t,\ y = 0;$
9. $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + (4y^2 + 4y^2 z) \cdot \vec{j} - 4z^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : y^2 + z^2 = 9,\ x = 1;$
10. $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + (x^2 + 2yz) \cdot \vec{j} + 3y^2 \cdot \vec{k},\ (\mathcal{L}) : x = b\cos t,\ y = v\sin t,\ z = 0.$

Задача 9. Доказать, что

1. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0;$
2. $\operatorname{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{b}$
3. $\operatorname{div}(u \cdot \vec{a}) = u \cdot \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u,\ u(x,\ y,\ z)$- дифференцируемая функция ;
4. $\operatorname{grad}(u \cdot v) = v \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} v,\ u(x,\ y,\ z),\ \ v(x,\ y,\ z)$- дифференцируемые функции ;

5. $\operatorname{div}(f(r)\cdot\vec{r}) = 3f(r) + r\dfrac{df}{dr}$;
6. $\Delta u = \nabla\cdot\vec{a}$;
7. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}$;
8. $\operatorname{rot}(\vec{c}\cdot f(r)) = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{df}{dr}[\vec{r},\vec{c}]$;
9. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = ?,\ r^2 = x^2+y^2+z^2$;
10. $\operatorname{rot}(\vec{a}\cdot f(r)) = ?,\ \vec{a} = y\cdot\vec{i} - 2\cdot\vec{j} + xz\cdot\vec{k}?,\ r^2 = x^2+y^2+z^2$.

Задача 10.

1. $\nabla\cdot(\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b}))=?,\ \vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$;
2. $\nabla\times(\vec{r}\cdot\vec{a}) = ?,\ \vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k},\ r^2=x^2+y^2+z^2$;
3. $\nabla\times\vec{a}, = ?,\ \vec{a} = \cos\Big(r(y\vec{i}-2\vec{j}+xz\vec{k})\Big)$;
4. $\nabla\times\vec{a}, = ?,\ \nabla\cdot\vec{a}, = ?,\ \vec{a} = \cos\Big(r(2x\vec{i}+3y\vec{j}+z\vec{k})\Big)$;
5. Найти потенциал, $\nabla\times\vec{a}, = ?,\ \nabla\cdot\vec{a}, = ?$, и векторные линии поля вектора $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$;
6. Найти $\nabla\times\vec{a}, = ?,\ \nabla\cdot\vec{a}, = ?$, поля вектора $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}\cdot\ln r}{r^3}$;
7. Найти $\operatorname{rot}\dfrac{\vec{a}}{r}$, $\vec{a}$ – постоянный вектор;
8. Для поля вектора $\vec{a} = r^3\vec{r}$ найти $\nabla\times\vec{a}, = ?,\ \nabla\cdot\vec{a}, = ?$;
9. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$, если $\vec{a} = (yz\vec{i} - 2xz\vec{j})\cos r,\ r^2=x^2+y^2+z^2$;
10. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$, если $\vec{a} = (\vec{r}+\vec{b})\cdot\cos r,\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{b}$ – постоянный вектор.

Некоторые свойства оператора ∇:

$$
\begin{array}{lll}
\operatorname{div}(\varphi\vec{v}) = \varphi\operatorname{div}\vec{v} + \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{v} & \operatorname{rot}(\varphi\vec{v}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{v} + (\operatorname{grad}\varphi)\times\vec{v} & \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \vec{0} \\
\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\operatorname{rot}\vec{u}) - \vec{u}\cdot(\operatorname{rot}\vec{v}) & \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \nabla^2\vec{v} & \operatorname{div}\operatorname{rot}\tilde{v} = 0 \\
\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi & \nabla^2\vec{v} \equiv (\nabla^2 v_1, \nabla^2 v_2, \nabla^2 v_3) &
\end{array}
$$