Задача №1

Построить линии уровня скалярного поля u=u(x,y); убедиться что grad $u(M_0)$ перпендикулярен соответствующей линии уровня $u(x,y)=u(M_0)$ в точке M_0.

$$u(x,y)=\frac{1}{4x^2+y^2};\ M_0(2,3)$$

Линии уровня:

$$\frac{1}{4x^2+y^2}=C$$

$$4Cx^2+Cy^2=1 \qquad x,y\neq 0,\ C\neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-8x}{\left(4x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2y}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$$

$$grad\ u=\frac{-8x}{\left(4x^2+y^2\right)^2}\vec{i}-\frac{-2y}{\left(4x^2+y^2\right)^2}\vec{j}$$

$$grad\ u\Big|_{(2,3)}=\frac{-16}{625}\vec{i}-\frac{6}{625}\vec{j}$$

в точке M_0 $C=\frac{1}{25}=0{,}04$

Линии уровня

$$\frac{1}{4x^2+y^2}=\frac{1}{25},\quad 4x^2+y^2=25,\quad y=\sqrt{25-4x^2}$$

$$y'=\frac{-4x}{\sqrt{25-4x^2}},\quad y-3=\frac{-8}{3}(x-2),\quad \vec{n}=\left(\frac{8}{3},1\right)$$

Проверим, что grad $u(M_0)$ параллелен нормальному вектору линии уровня проходящей через эту точку, :

$$\begin{vmatrix}\frac{-16}{625} & \frac{-6}{625}\\ \frac{8}{3} & 1\end{vmatrix}=\frac{-1}{625}\begin{vmatrix}16 & 6\\ \frac{8}{3} & 1\end{vmatrix}=0$$

координаты пропорциональны!

Задача №2

Найти производную скалярного поля u=u(x,y,z) в точке M_0 по направлению вектора e(т.е. проекцию градиента на это направление).

$$u=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}},\quad \bar{e}=2\vec{i}+\vec{k},\quad M_0=(4,1,-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}=\left(\frac{1}{2y\sqrt{x}}+\frac{yz}{\left(x+\sqrt{y}\right)^2}\right)\Big|_{M_0}=0{,}17$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}=\left(\frac{-\sqrt{x}}{y^2}-\frac{z\left(x+\sqrt{y}\right)-yz\cdot\frac{1}{2}y^{-2}}{\left(x+\sqrt{y}\right)}\right)\Big|_{M_0}=-1{,}64$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}=\frac{-y}{x+\sqrt{y}}\Big|_{M_0}=-0{,}02$$

$$e_0=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0{,}17-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0{,}2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0{,}14$$

Задача №3

Показать, что поле вектора $\vec{F}(x,y,z)$ потенциальное; вычислить потенциал поля.

$$\vec{F}=\left(-yz\sin x-\frac{3}{z}\right)\vec{i}+\left(z\cos x+1\right)\vec{j}+\left(y\cos x+\frac{3x}{z^2}+1\right)\vec{k}$$

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \left(-yz\sin x-\frac{3}{z}\right) & \left(z\cos x+1\right) & \left(y\cos x+\frac{3x}{z^2}+1\right)\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\cos x-\cos x\right)-$$

$$-\vec{j}\left(-y\sin x+\frac{3}{z^2}+y\sin x-\frac{3}{z^2}\right)+\vec{k}\left(-z\sin x+z\sin x\right)=\vec{0}$$

Значит поле является потенциальным.

Вычисляем потенциал поля:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(-y_0z_0\sin x-\frac{3}{z_0}\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}(z_0\cos x+1)dy+\int\limits_{z_0}^{z}\left(y_0\cos x+\frac{3x_0}{z_0^2}\right)dz=$$

$$=\left(y_0z_0\cos x-\frac{3x}{z_0}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}+(yz_0\cos x+y)\Bigg|_{y_0}^{y}+\left(yz\cos x-\frac{3x}{z}+z\right)\Bigg|_{z_0}^{z}=$$

$$=y_0z_0\cos x-\frac{3x}{z_0}-y_0z_0\cos x_0+\frac{3x_0}{z_0}+yz_0\cos x+y-y_0z_0\cos x-y_0+yz\cos x-$$

$$-\frac{3x}{z}+z-yz_0\cos x+\frac{3x}{z_0}-z_0=y+yz\cos x-\frac{3x}{z}+z+C$$

$$C\equiv-y_0z_0\cos x_0+\frac{3x_0}{z_0}-y_0-z_0$$

Задача №4

Найти работу вектора силы $\vec{F}(x,y,z)$ при перемещении по кривой (L) от точки M до точки N.

$$\vec{F}=xy\vec{i}+2y\vec{j},\quad (l): x^2+y^2=1,\quad (x\geq 0, y\geq 0),\quad M(1,0),\quad N(0,1)$$

$$(l):\begin{cases}y=\sqrt{1-x^2}\\ x=x\end{cases}$$

$$A=\int\limits_{1}^{0}\left(x\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=-\int\limits_{0}^{1}\left(x\sqrt{1-x^2}-2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,d\left(1-x^2\right)+\int\limits_{0}^{1}2xdx=\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\Bigg|_0^1+x^2\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

Ответ: $A=\frac{2}{3}$

Задача №5

Найти циркуляцию векторного поля F(x,y,z) вдоль контура Г (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t)

$$F=3y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\\ z=3-3\cos t-3\sin t\end{cases}$$

$$Ц=\int\limits_{0}^{2\pi}\left[9\sin t(-3\sin t)-9\cos t\cdot 3\cos t+3\cos t\cdot(3\sin t-3\cos t)\right]dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\left(-27\sin^2 t-27\cos^2 t+9\cos t\sin t-9\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\left[-27+\frac{9}{2}\sin 2t-\frac{9}{2}(1+\cos 2t)\right]dt=\left[-27t+\left(-\frac{9}{4}\cos 2t\right)-\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-54\pi-\frac{9}{4}-9\pi+\frac{9}{4}=-63\pi$$

Ответ: Ц=-63π

Задача №6

Найти поток векторного поля F(x,y,z) через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

$$\vec{F} = \pi x\vec{i} + \frac{\pi}{2} y\vec{j} + (4-2z)\vec{k}$$

$$p:\ x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma}\left[\frac{12\pi x}{13} + \frac{2\pi y}{13} + \frac{3}{13}(4-2z)\right]d\sigma = \frac{1}{13}\iint\limits_{\sigma}(12\pi x + 2\pi y - 6z + 12)d\sigma =$$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos y} = \frac{13}{3}dxdy;\quad z = 4 - 4x - \frac{4}{3}y$$

$$\Pi = \iint\limits_{D}(12\pi + 2\pi y - 2y + 24x + 8y + 12)\frac{1}{3}dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_{D}[(12\pi + 24)x + (2\pi + 8)y - 12]dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{3-3x}[(12\pi + 24)x + (2\pi + 8)y - 12]dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^1\left[(12\pi + 24)xy + (\pi + 4)y^2 - 12y\right]\Bigg|_0^{3-3x}dx =$$

$$= 3\pi - 10$$

Ответ: П=3π-10

Задача №7

Найти поток векторного поля $\vec{F} = (zx + y)\vec{i} + (xy - z)\vec{j} + (x^2 + yz)\vec{k}$ через замкнутую поверхность S; (нормаль внешняя). $S : x^2 + y^2 = 2,\ z = 0, z = 1$

$$\vec{n} = \frac{grad(x^2 + y^2 - z)}{\left|grad(x^2 + y^2 - z)\right|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\Pi_{\sigma_1} = \iint_{\sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma_1 = \iint_{\sigma_1} \frac{(zx^2 + xy + xy^2 - zy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma_1$$

$$d\sigma_1 = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} dxdz = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2 - x^2}} dxdz;$$

$$\Pi_{\sigma_1} = \iint_D \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \left(zx^2 + x\sqrt{2 - x^2} + x(2 - x^2) - z\left(\sqrt{2 - x^2}\right)\right) dxdz =$$

$$= \iint_D \left(\frac{zx^2}{\sqrt{2 - x^2}} + x + x\sqrt{2 - x^2} - z\right) dxdz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 \left(\frac{zx^2}{\sqrt{2 - x^2}} + x + x\sqrt{2 - x^2} - z\right) dz =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{z^2 x^2}{2\sqrt{2 - x^2}} + xz + xz\sqrt{2 - x^2} - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{2\sqrt{2 - x^2}} + x + x\sqrt{2 - x^2} - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{2 - x^2} + \frac{1}{2} ln\left|x + \sqrt{2 - x^2}\right| + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 2)^3} - \frac{1}{2} x =$$

$$= -\sqrt{2};$$

$$\vec{n}_2 = (0,0,1) \quad z = 0;$$

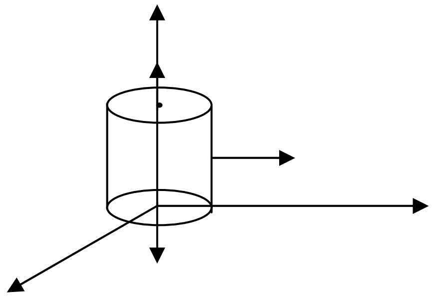
$$\Pi\sigma_2 = \iint_{\sigma_2} (x^2 + yz) d\sigma_2, \quad d\sigma_2 = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = dxdy;$$

$$\Pi\sigma_2 = \iint_{D_2} x^2 dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2x^2\sqrt{2} dx = 2\sqrt{2}\, \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{16}{3};$$

$$\vec{n}_3 = (0,0,-1)$$

$$\Pi\sigma_3 = -\iint_{\sigma_3} (x^2 + yz) d\sigma_3 = -\frac{16}{3};$$

$$\Pi\sigma = \Pi_{\sigma_1} + \Pi\sigma_2 + \Pi\sigma_3 = -\sqrt{2} + \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = -\sqrt{2}.$$



Задача №8

Проверить формулу Стокса для поля вектора F(x, y, z), принимая за контур интегрирования кривую (L), а за поверхность интегрирования - часть плоскости натянутой на (L).

$$\vec{F} = 3y^2\vec{i} - 3z^2\vec{j} + 3x^2\vec{k}$$

$$(l): x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$\vec{n} = \frac{grad\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{\left|grad\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}};$$

$$rot\vec{F} = (6z; -6x; -6y)$$

$$Ц = \iint_\sigma \left(rot\vec{F}, \vec{n}\right) d\sigma = \iint_\sigma \frac{12xz - 12xy - 12yz}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} d\sigma$$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dxdy$$

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$Ц = 6\iint_D \left(x - \frac{xy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} - y \right) dxdy = 6\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x - \frac{xy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} - y \right) dy =$$

$$= 6\int_0^2 \left(xy - x\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = 6\int_0^2 \left(x\sqrt{4 - x^2} - \frac{4 - x^2}{2} + x\sqrt{4 - x^2} \right) dx =$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3} - 2x + \frac{x^2}{6} \right)\Bigg|_0^2 = 16;$$

$$Ц = \oint_L \left(rot\vec{F}, \vec{n}\right) = \oint_L 3y^2 dx - 3z^2 dy - 3x^2$$

$$(AB): \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\oint_{AB} = 2\cdot 6\sin^2 t(-2\sin t)dt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d\cos t = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)d\cos t = 24\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -24 + 8 = -16;$$

$$(AC): \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 0 \quad\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ z = 2\sin t \end{cases}$$

$$\oint_{AC} 12\cos^2 t 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 24(1-\sin^2 t)d\sin t = 24\left(\sin t - \frac{\sin^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -16;$$

$$(BC): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2\cos t \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ z = 2\sin t \end{cases}$$

$$\oint_{BC} -12\sin^2 t(-2\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -24(1-\cos^2 t)d\cos t = 16;$$

$$Ц = \oint_{AB}(\vec{F}, d\vec{r}) + \oint_{AC}(\vec{F}, d\vec{r}) + \oint_{AB}(\vec{F}, d\vec{r})$$

Таким образом:

$$\iint_{\sigma}(rot\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \oint_{l}(F,\ d\vec{r})$$

Задача №10

Найти $rot\,\frac{\vec{a}}{2}$, где $\vec{a}$ - постоянный вектор,

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$

Решение

$$rot\,\frac{\vec{a}}{2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x_0}{r} & \frac{y_0}{r} & \frac{z_0}{r} \end{vmatrix} = \vec{i}\,\frac{-x_0}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \vec{j}\,\frac{-y_0}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \vec{k}\,\frac{-z_0}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{-1}{r^2}(x_0, y_0, z_0) = \frac{-1}{r^2}\vec{a}.$$

Ответ: $rot\,\frac{\vec{a}}{2} = \frac{-1}{r^2}\vec{a}$

Задача №9

Доказать, что $rot(rot\vec{a}) = grad(div\vec{a}) - \Delta\vec{a}$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}; \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right);$$

$$rot(rot\vec{a}) = \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} \right)\vec{k};$$

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$grad(div\vec{a}) = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right)\vec{k};$$

$$\Delta\vec{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right)\vec{k};$$

$$\Rightarrow rot(rot\vec{a}) = grad(div\vec{a})$$