

# Программа

для экзамена по математическому анализу (январь 2010)

## Введение в анализ. Предел и непрерывность

Введение. Элементы теории множеств: множество, операции над множествами, сравнение бесконечных множеств, мощность множества, счетные множества, множества мощности континуум, их основные свойства. Числовые множества: натуральных, целых, рациональных, действительных чисел. Отрезок, интервал, ограниченное множество, точная верхняя и нижняя грани -  $\sup$  и  $\inf$ .

Элементы математической логики: высказывание, операции над высказываниями, предикат, кванторы существования и единственности. Строение односторонней и двусторонней теорем. Теоремы прямая, обратная, противоположная, противоположная обратной (доказательство от противного). Понятия необходимого и достаточного условий

Числовая последовательность (ЧП). Способы задания. Предел ЧП, его геометрический смысл. Свойства предела ЧП: единственность, ограниченность ЧП, имеющей предел, теоремы об арифметике, мажоранте и миноранте, о связи знака последовательности и её предела.

Подпоследовательность ЧП, связь сходимости ЧП и её подпоследовательности. Принцип Кантора. Лемма Больцано - Вейерштрасса. Теорема о сходимости монотонной и ограниченной ЧП. Второй замечательный предел (доказательство существования, оценка величины). Вычисление пределов ЧП, заданных различными способами. Использование тождественных преобразований, свойств предела ЧП и некоторых "стандартных" пределов.

Функция одной переменной (ФОП): определение, способы задания, основные свойства. Предел ФОП в точке и на бесконечности:

определение в терминах окрестностей и через "эпсилон-дельта", определение по Гейне и его отрицание. Односторонние пределы, их связь с обычными. Бесконечно большие (б/б) и бесконечно малые функции (б/м). Свойства функции, имеющей конечный предел, геометрический смысл предела.

Непрерывность ФОП в точке: определения (их несколько!), классификация точек разрыва. Свойства функции, непрерывной в точке: ограниченность, сохранение знака, теоремы об арифметике, о непрерывности сложной функции. Непрерывность элементарных функций (б/д).

Непрерывность на множестве. Свойства ФОП, непрерывной на отрезке: ограниченность, достижение *sup* и *inf*, обращение в нуль, достижение промежуточного значения.

### Дифференциальное исчисление ФОП

Задачи, приводящие к понятию производной (механический смысл). Определение производной ФОП в точке. Геометрический смысл производной. Касательная и секущая. Уравнение касательной. Вывод формул производной суммы, произведения, отношения. Таблица производных. Производная обратной функции, сложной функции, функции, заданной параметрически, неявной функции.

Дифференцируемость ФОП в точке. Теоремы о связи дифференцируемости и непрерывности, дифференцируемости и существовании производной. Дифференциал в точке: определение, связь с производной, инвариантность формы.

Основные теоремы анализа. Теорема Ферма (без док.). Теоремы Коши, Лагранжа и Ролля (доказательство, геометрический смысл). Правило Лопиталя (доказательство для одностороннего случая неопределенности " $\frac{0}{0}$ ", формулировка для случаев " $\frac{0}{0}$ " и " $\frac{\infty}{\infty}$ ").

Сравнение бесконечно малых (б/м), понятие эквивалентных б/м, обозначение "о-малое". Классификация неопределенностей, Раскрытие различных типов неопределенностей алгебраическими преобразованиями, с помощью замечательных пределов, асимптотических разложений, правила Лопиталя.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Условия разложения по формуле Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и в форме Пеано. Разложения для некоторых функций. Получение новых разложений с помощью готовых. Применение формулы Тейлора для вычисления пределов, для приближенных вычислений. Погрешности ограничения и округления.

Монотонность функции на интервале: определение, достаточное условие монотонности. Локальный экстремум ФОП: определение: необходимый признак, достаточный признак. Процедура отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке (глобальный экстремум).

Выпуклость функции на интервале: определение, достаточное условие выпуклости, точки перегиба.

Понятие асимптоты графика функции. Необходимые и достаточные условия существования наклонной асимптоты. Общая схема исследования ФОП и построение графика.

### Интегральное исчисление ФОП

Первообразная и её свойства. Неопределенный интеграл, его свойства. Основные методы вычисления неопределенного интеграла: сведением к "табличному" интегралу, с использованием свойств. Метод интегрирования по частям, метод замены переменной интегрирования. Некоторые подстановки. Возвратные интегралы, рекуррентные формулы, неберущиеся интегралы.

Дробно-рациональные функции. Теорема о разложении правиль-

ной рациональной дроби на простейшие (формулировка). Процедура интегрирования дробно-рациональных функций (математический смысл). Интегрирование некоторых иррациональностей. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование тригонометрических выражений.

Задачи, приводящие к понятию определенный интеграл (ОИ). ОИ как предел интегральной суммы: разбиение отрезка, интегральная сумма, предел интегральной суммы, обозначения. Геометрический и механический смысл ОИ. Основные свойства ОИ (с доказательством).

ОИ с переменным верхним пределом. Теоремы об основных свойствах: о непрерывности, о дифференцировании, Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования по частям и замены переменной ОИ.

Геометрические приложения ОИ: вычисление площадей плоских фигур и длин дуг при параметрическом, декартовом и полярном задании кривых (на уровне практики).

Программу составил доцент каф. ВМ и УМФ Крохин А.Л.