

# Ряды

## Вариант 1

апрель 2003 год, поток Крохина А.Л.

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots$$

Вычислить частичные суммы  $S_n$  для  $n = 5, 10, 100$ . Для каждого случая найти абсолютную,  $\Delta_n$ , и относительную,  $\delta_n$ , погрешности приближенного равенства  $S = S_n$ . Результаты занести в таблицу.

2 ) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а)  $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots$ ,

б)  $3 - \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{7}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$ ,

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\ln n}{n^2} + \frac{(-1)^n i}{n} \right)$ .

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n \sqrt{n}}.$$

Вычислить его сумму с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$  в точках  $2 \pm k * R/5$ , где  $k = \overline{0, 4}$ ,  $R$  - радиус сходимости.

4) Разложить функцию

$$f(x) = x e^{2x}$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений. В данном случае необходимо воспользоваться рядом

5) Разложить функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 2}$  в ряд Тейлора по степеням  $x + 2$  и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2+3i)^{n+1}}.$$

7) Можно ли почленно дифференцировать записанный ряд ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$$

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y'' = y e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Найти  $n = 3$  ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

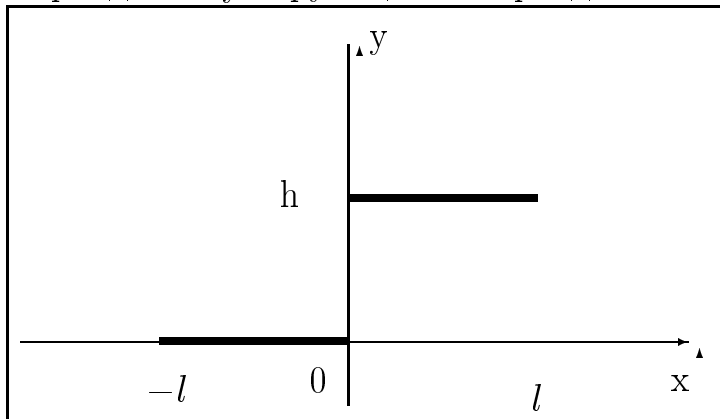
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_1^2 \frac{\sin x dx}{x^3}$$

с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ .

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом  $T = 2l$ .



б) функцию, заданную на промежутке  $[0, \pi]$ , продолжая ее четным или нечетным образом

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$