

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

Вычислить частичные суммы  $S_n$  для  $n = 5, 10, 100$ . Для каждого случая найти абсолютную,  $\Delta_n$ , и относительную,  $\delta_n$ , погрешности приближенного равенства  $S = S_n$ . Результаты занести в таблицу.

2 ) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а)  $\sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{9} + 3 \sin \frac{\pi}{27} + \dots$ ,

б)  $1 - \frac{3}{1+2^3} + \frac{4}{1+3^3} - \frac{5}{1+4^3} + \dots$ ,

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(1)}{2^n n!} + i \frac{1}{3^n} \right)$ .

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{4^n n^3}$ . Вычислить его сумму с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$  в точках  $8 \pm k * R/5$ , где  $k = \overline{0, 4}$ ,  $R$  - радиус сходимости. 4) Разложить функцию

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию  $f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$  в ряд Тейлора по степеням  $x-2$  и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)^2}$ .

7) Доказать, что функция  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}} \right)$  существует для любого  $x \in (-\infty, +\infty)$ , а ряд сходится неравномерно на  $[-l, l]$ , где  $l > 0$ .

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y' = xy + y^2$ ,  $y(0) = 1$ . Найти  $n = 3$  ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 25) y = 0.$$

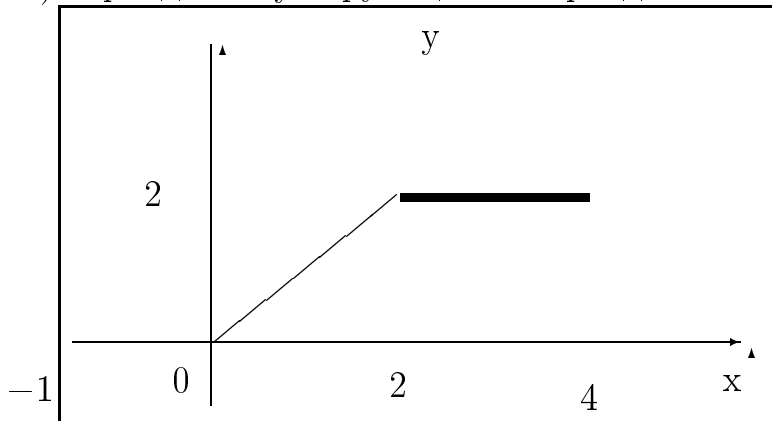
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_{0.1}^{0.8} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ . Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом  $T = 4$ .



б) функцию, заданную на промежутке  $(0, \pi)$ , продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \cos \frac{x}{2}.$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(4n+5)}$$