

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots$$

Вычислить частичные суммы  $S_n$  для  $n = 5, 10, 100$ . Для каждого случая найти абсолютную,  $\Delta_n$ , и относительную,  $\delta_n$ , погрешности приближенного равенства  $S = S_n$ . Результаты занести в таблицу.

2 ) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а)  $1 + \frac{1000}{1} + \frac{1000^2}{1 \cdot 2} + \frac{1000^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ ,

б)  $\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} - \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots$ ,

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{\pi}{3^n} + i \frac{3^n}{n!} \right)$ .

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n(n+1)}$ .

Вычислить его сумму с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$  в точках  $5 \pm k * R/5$ , где  $k = \overline{0, 4}$ ,  $R$  - радиус сходимости.

4) Разложить функцию  $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$  в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию  $f(x) = 3^x$  в ряд Тейлора по степеням  $x - 2$  и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

7) Пользуясь почленным интегрированием функционального ряда, найти сумму ряда  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{e^n} \right)$   $x > 0$ .

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y' = y + x^2/y$ ,  $y(0) = 1$ . Найти  $n = 3$  ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/25) y = 0.$$

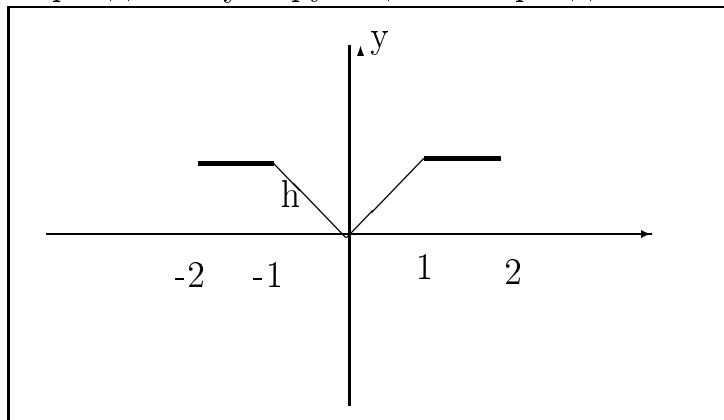
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_{0.3}^{0.8} \frac{x dx}{1+x^5}$$

с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ . Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом  $T = 4$ .



б) функцию, заданную на промежутке  $(0, 2\pi)$ , продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} x(x - \pi), & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2}$$