

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{4}{11}\right)^4 + \dots,$

б) $\frac{1}{1 \cdot 11} - \frac{1}{2 \cdot 12} + \frac{1}{3 \cdot 13} - \frac{1}{4 \cdot 14} + \dots,$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + i \frac{2^n}{n!} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n (n+1)(n+2)}.$$

Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$

в точках $-3 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию

$$f(x) = \int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = (x+1) \sin(x - \pi/6)$ в ряд Тейлора по степеням $x + \pi/3$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n z^n}{n^2}.$

7) Найти область равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{\sqrt{n^5}}.$ Можно ли этот ряд почленно дифференцировать?

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = x^3 + y^2, y(0) = 1/2.$ Найти $n = 3$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x y'' + y' + x y = 0.$$

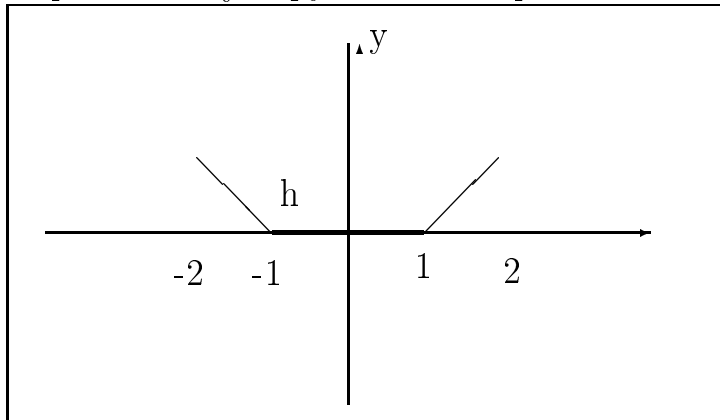
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_{0.1}^{0.8} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 4$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, 2\pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi; \\ \cos x/2, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$