

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1 + \frac{2}{1!} + \left(\frac{2^2}{2!}\right) + \left(\frac{2^3}{3!}\right) + \dots$,

б) $1 - \frac{\cos e}{e} + \frac{\cos 2e}{e^2} - \frac{\cos 3e}{e^3} + \frac{\cos 4e}{e^4} + \dots$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + i \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)$.

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{2n-1}(n+2)}$.

Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $1 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости. 4) Разложить функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-3i)^n}$.

7) Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно для $x \in (0, +\infty)$.

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' = x^2 y - y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$. Найти $n = 4$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4) y = 0.$$

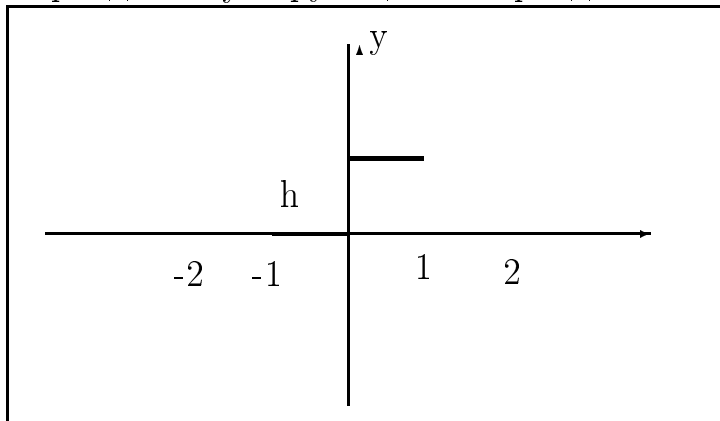
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_1^2 x^4 \sin(x^2) dx$$

с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 2$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, \pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(4n + 2)}{2n + 1}$$