

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{6 \cdot 12} + \frac{1}{8 \cdot 14} + \dots$$

Вычислить частичные суммы  $S_n$  для  $n = 5, 10, 100$ . Для каждого случая найти абсолютную,  $\Delta_n$ , и относительную,  $\delta_n$ , погрешности приближенного равенства  $S = S_n$ . Результаты занести в таблицу.

2 ) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots,$

б)  $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{7} - \frac{4}{81} + \dots,$

в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\cos n}{2^n} + i \frac{1}{n(n-1)} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-6)^n}{3^{2n}}$ .

Вычислить его сумму с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$  в точках  $6 \pm k * R/5$ , где  $k = \overline{0, 4}$ ,  $R$  - радиус сходимости. 4) Разложить функцию

$$f(x) = \int_0^x t^4 \cos 2t dt$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию  $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$  в ряд Тейлора по степеням  $x + 1$  и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 2i)^n}{3^n \sqrt{n}}$ .

7) Доказать, что функция  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  существует для любого  $x \in (-\infty, +\infty)$ , а ряд сходится неравномерно. Существует ли отрезок равномерной сходимости?

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y'' = ye^x + 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ . Найти  $n = 6$  ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0.$$

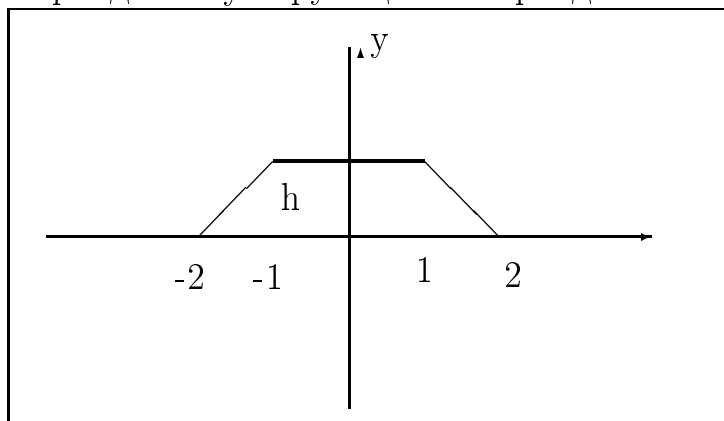
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_1^2 x^8 e^{-3x^2} dx$$

с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ . Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом  $T = 4$ .



б) функцию, заданную на промежутке  $(0, \pi)$ , продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \sin 3x.$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$