

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin 3\alpha}{3\sqrt{3}} + \frac{\sin 4\alpha}{4\sqrt{4}} + \dots$,

б) $2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{8} - \frac{5}{16} + \dots$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 5^n}{10^n} + i \frac{1}{(n+2)!} \right)$.

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n \sqrt[3]{n}}$. Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $-3 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию

$$f(x) = (x^2 + 1) \sin 2x - 2x \cos 2x$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = x e^{-2x}$ в ряд Тейлора по степеням $x + 2$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2+i)^n}$.

7) Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$?

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = x^2 y^2 - 1$, $y(0) = 1$. Найти $n = 3$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/4) y = 0.$$

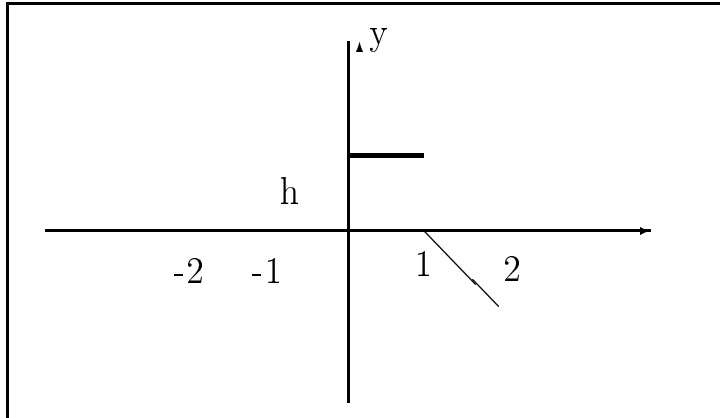
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_1^2 x^6 e^{-x^2} dx$$

с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 2$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, 2\pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(4n + 2)}{(2n + 1)^2}$$