

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \frac{4}{13 \cdot 17} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$,

б) $2 - \frac{5}{8} + \frac{10}{27} - \frac{17}{64} + \dots$,

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n^2} + i \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n \sqrt{n}}$. Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $5 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию

$$f(x) = x \ln(x + 3) + x^2$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = (x - \pi) \cos(\pi/4 + x)$ в ряд Тейлора по степеням $x - \pi/4$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2+3i)^{n+1}}$.

7) Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{5+n^3x^2}$ на отрезке $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$?

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + x y^2$, $y(0) = 1$. Найти $n = 4$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 3/2) y = 0.$$

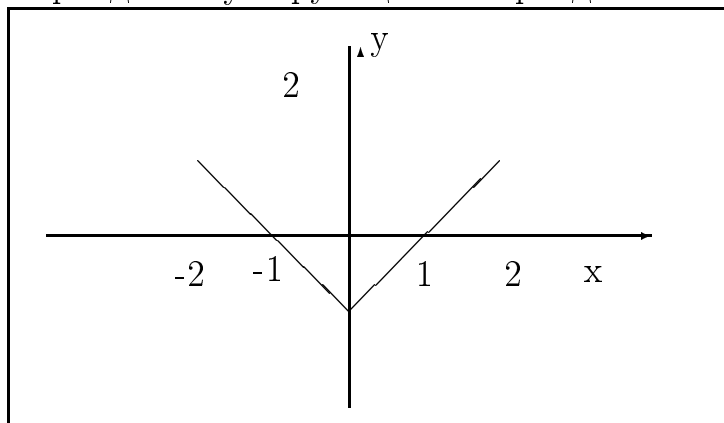
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_1^3 x^2 \cos x^2 dx$$

с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 4$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, \pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$