

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{6}{4 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 10} + \frac{6}{10 \cdot 13} + \frac{6}{13 \cdot 16} + \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots \quad (1)$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots,$

б) $\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} \dots,$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + i \frac{1}{2^n} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-6)^n}{3^{n+1}(n^3+1)}$.

Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $6 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию

$$f(x) = x \cos^2 x$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = x e^{-x}$ в ряд Тейлора по степеням $x + 3$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \sqrt{2^n}}{(1+2i)^n}$.

7) Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$ на $[0, \infty)$?

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$. Найти $n = 4$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/9) y = 0.$$

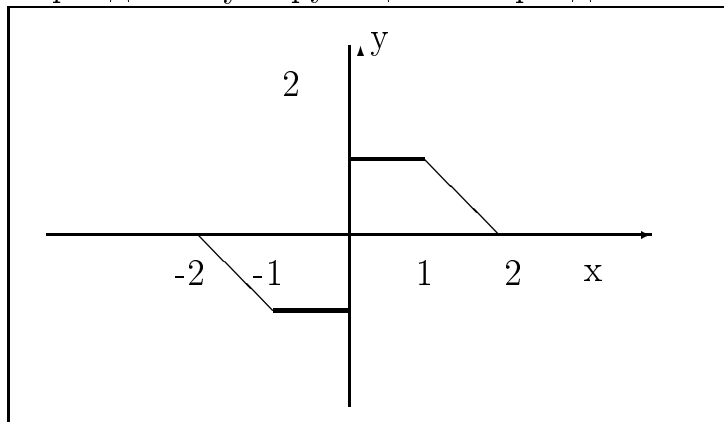
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_{0.2}^{0.7} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 4$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, \pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \sin x.$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n}$$