

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \frac{1}{3 \cdot 13} + \dots$,

б) $\frac{\cos e}{e} - \frac{\cos 2e}{e^2} + \frac{\cos 3e}{e^3} - \frac{\cos 4e}{e^4} + \dots$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} + i \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)$.

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n n}$$

Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $5 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости. 4) Разложить функцию $f(x) = \sin x^2$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n(1-i)^n}$$

7) Можно ли почленно дифференцировать записанный ряд ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$$

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' = 2 + e^{xy}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Найти $n = 4$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

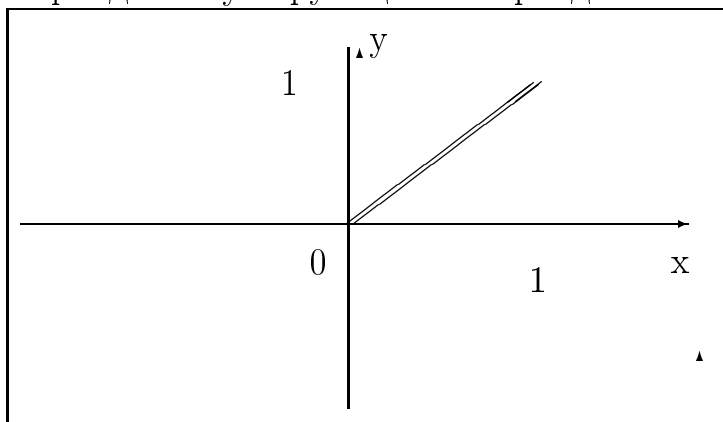
9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/9) y = 0$$

10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0.8}^{1.4} \frac{x^6 e^{-x} dx}{x^3}$ с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 1$.



б) функцию, заданную на промежутке $[0, \pi]$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n + 1)}{(2n + 1)^2}$$