

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 8} + \frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{4 \cdot 8} + \dots$$

Вычислить частичные суммы  $S_n$  для  $n = 5, 10, 100$ . Для каждого случая найти абсолютную,  $\Delta_n$ , и относительную,  $\delta_n$ , погрешности приближенного равенства  $S = S_n$ . Результаты занести в таблицу. 2 ) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а)  $\frac{\sin \alpha}{1\sqrt{1}} + \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin 3\alpha}{3\sqrt{3}} + \dots,$

б)  $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots,$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n+1)} + i \frac{(-1)^{n+1}}{2^{(n-1)}(n-1)!} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{4^n n^3}$ . Вычислить его сумму с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$  в точках  $8 \pm k * R/5$ , где  $k = \overline{0, 4}$ ,  $R$  - радиус сходимости. 4) Разложить функцию

$$f(x) = \sin(x + \pi/4)$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию  $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 6)$  в ряд Тейлора по степеням  $x + 2$  и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(3-2i)^n}$ .

7) Исследовать на непрерывность функцию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad x \in [0, +\infty).$$

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $(x+1)y'' + xy' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$ .

Найти  $n = 4$  ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/4) y = 0$$

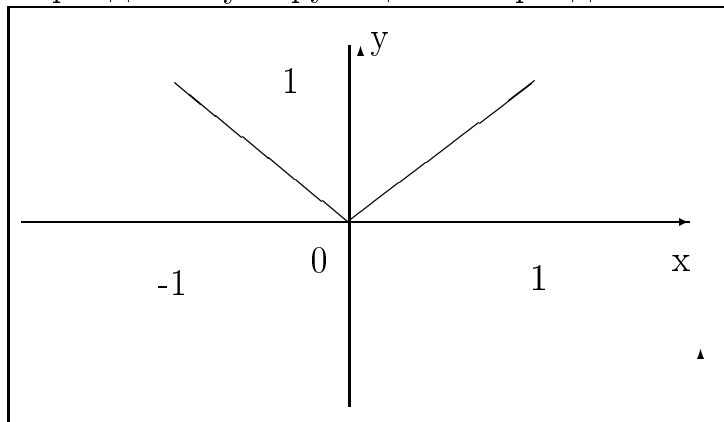
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_{0.3}^{0.8} \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{x}$$

с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ . Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом  $T = 2$ .



б) функцию, заданную на промежутке  $(0, \pi)$ , продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin 2n}{n}$$