

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{2}{7} + \left(\frac{4}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{15}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^2 + \dots,$

б) $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{11^2} + \dots,$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} + i \frac{n^3}{2^n} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n n \sqrt[3]{n}}.$$

Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $3 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n n^3}$. Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $3 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{(1-3x^2)^2}$ в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = x e^{-3x}$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(\sqrt{3}-i)^n}$.

7) Пользуясь определением, доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), \quad x \in [0, +\infty).$$

равномерно сходится на отрезке $[-1, 1]$.

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = y + x^3$, $y(0) = 1/2$. Найти $n = 5$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

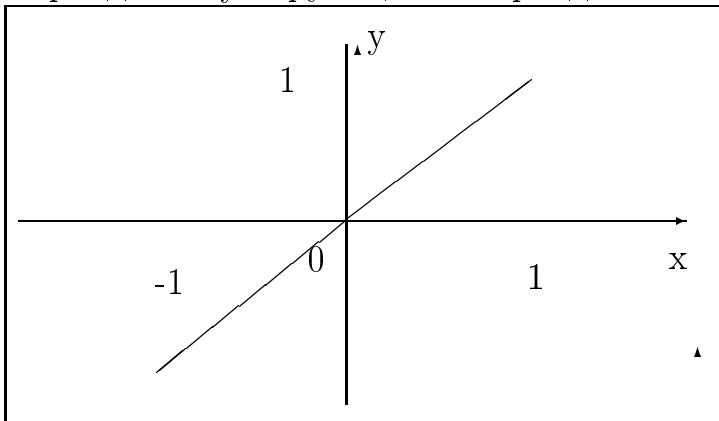
9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/4) y = 0$$

10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0.1}^{0.8} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 2$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, \pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$