

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1 + \frac{2}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots,$

б) $\frac{1}{2} - \frac{2}{1 + 2^4} + \frac{3}{1 + 3^4} - \frac{4}{1 + 4^4} + \dots,$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + i \cos \frac{\pi}{n} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n(n^3+1)}$. Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $-3 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию $f(x) = \ln(x+10)$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = \sin x + 3 \cos x$ в ряд Тейлора по степеням $x + \pi/4$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n 2^n}{(1+i\sqrt{3})^n}$.

7) Показать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $x \in [0, +\infty)$. не существует мажорантного

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = x^2 y^2 - 1$, $y(0) = 2$.

Найти $n = 3$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 9) y = 0$$

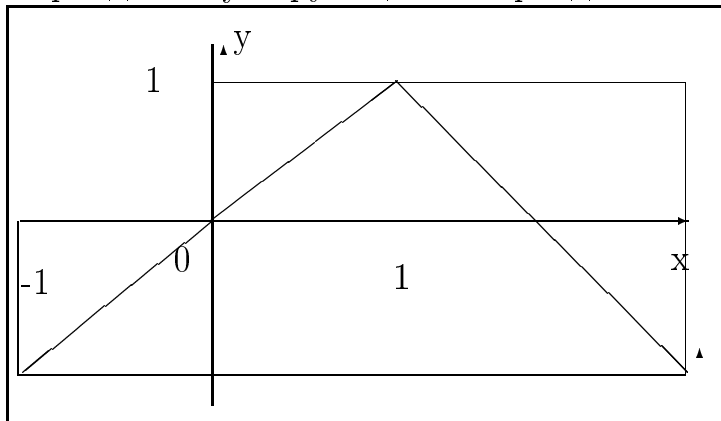
10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_{0.1}^{0.7} \frac{dx}{1+x^4}$$

с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 4$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, 2\pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \text{sign} \sin x$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$$