

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 16} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{\sin \alpha}{1 \cdot 3} + \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot 4} + \frac{\sin 3\alpha}{3 \cdot 5} + \dots,$

б) $1 - \frac{3}{4} + \frac{4}{8} - \frac{5}{16} + \dots,$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1)}{2^n} + i \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n-1}}{(2n-1)! 6^{2n-1}} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n (2 + \sqrt{n})}$.

Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $4 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию $f(x) = \sin^2 2x + \cos 4x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$ в ряд Тейлора по степеням $x-3$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n_1)z^n}{2n^2 + 1}$.

7) Доказать, что для $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ функция $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ существует, а ряд сходится неравномерно на $(-\infty, +\infty)$.

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = y^2 - \sin x$, $y(0) = 0$.

Найти $n = 3$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 16) y = 0$$

10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0.3}^{0.7} \sqrt[3]{1+x^2} dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию

$$f(x) = |\sin x|;$$

б) функцию, заданную на промежутке $[0, 1]$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = x$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$