

1. Пользуясь определением найти сумму ряда:

$$\frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 17} + \dots$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n = 5, 10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную, Δ_n , и относительную, δ_n , погрешности приближенного равенства $S = S_n$. Результаты занести в таблицу.

2) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1 + \frac{7}{10} + \frac{2^n + 5^n}{100} + \frac{2^3 + 5^3}{1000} + \dots,$

б) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots,$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n-2}}{(2n-2)! 3^{2n-2}} \right).$

3) Найти и изобразить на чертеже область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{2^n \sqrt{n}}$. Вычислить его сумму с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $6 \pm k * R/5$, где $k = \overline{0, 4}$, R - радиус сходимости.

4) Разложить функцию

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{3x}$$

в ряд Маклорена . Определить область сходимости полученного ряда.

Эта задача во всех вариантах решается с помощью готовых разложений.

5) Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$ и найти область сходимости полученного ряда.

6) Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n (3-i)^n}{(n+1)!}$.

7) Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n}$, $x \in [0, +\infty)$ равномерно сходится на всей числовой оси, однако его нельзя почленно дифференцировать.

8) Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = y^2 + \cos x$, $y(0) = 0$. Найти $n = 3$ ненулевых членов ряда. Если возможно – записать выражение для общего члена ряда. Построить график точного и приближенного решений и сравнить их.

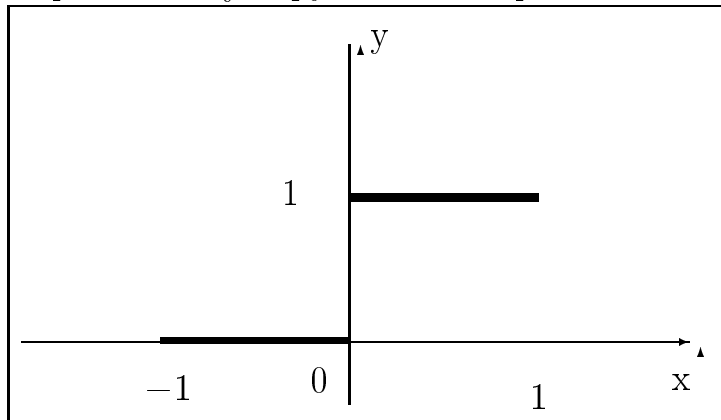
9) Найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/16) y = 0$$

10) Используя ряды вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0.8}^{1.4} x^4 e^{-2x^2} dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Для каждого случая указать число членов ряда, потребных для достижения заданной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Указать также и значения частичных сумм.

11) Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T = 2$.



б) функцию, заданную на промежутке $(0, \pi)$, продолжая ее периодически, а также четным и нечетным образом.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \cos 2x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

12) Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$$