Интегралы с конечными пределами, зависящие от параметра.

Ранее нам уже встречались интегралы, в которых подынтегральная функция зависит от двух переменных, а интегрирование совершается по одной из них в предположении, что вторая переменная считается постоянной. Так было в п. 115 при отыскании функции по ее полному дифференциалу и в п. 130 при вычислении двойного интеграла с помощью последовательного интегрирования. В виду того, что такие интегралы встретятся и в дальнейшем, как в курсе анализа, так и в различных дополнительных разделах (например, при изучении уравнений математической физики и операционного исчисления), рассмотрим их более подробно.

Итак, пусть задана функция $f(x, y)$, которая определена и непрерывна при всех значениях x и y, удовлетворяющих условиям $a \le x \le b$ и $c \le y \le d$. Если вычислять интеграл при различных значениях $y \in [c,\, d]$, то каждому значению y будет соответствовать свое значение интеграла, являющегося, таким образом, некоторой функцией от y обозначим ее через $I(y)$:

$$\int\limits_a^b f(x, y)dx.$$

Интервал интегрирования $[a,\, b]$ предполагается конечным (случай бесконечного интервала интегрирования будет рассмотрен позднее). Интервал $[c,\, d]$-область определения функции $I(y)$- может быть как конечным, так и бесконечным.

Примеры. 1) $\int\limits_0^1 e^{\lambda x}dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^1 = \frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}$, если $\lambda \ne 0$. При $\lambda = 0$ интеграл равен 1. Здесь функция $F(\lambda)$ определена и непрерывна при всех значениях λ (проверить непрерывность при $\lambda = 0$ предоставляем читателю).

2)$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lambda}\Bigg|_0^1 = \arcsin\frac{1}{\lambda}$. Интеграл определен, если $|\lambda| > 1$; при $\lambda = \pm 1$ интеграл становится несобственным (подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке x=1), но сходящимся.

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-\lambda^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - \lambda^2}) = \ln\frac{2+\sqrt(4+\lambda^2}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}$. Интеграл определен при $\lambda \in [-1,\, 1]$. Лишний раз подчеркнем, что если функция $f(x,\, y)$ и интервал интегрирования $[a,\, b]$ заданы, интеграл (*) зависит только от λ. Наша ближайшая задача изучить свойства функции $F(y)$-интеграла, зависящего от параметра. В основе лежит следующая

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна пои $a \le x \le b$ и $c \le y \le d$, то функция $F(y) = \int\limits_a^b dx$ непрерывна в интервале $[c,\, d]$.

Доказательство. Чтобы не усложнять доказательство дополнительно предположим, хотя это и не дано в условии теоремы, что функция $f(x,\, y)$ имеет частную производную f'_x ограниченную при всех рассматриваемых значениях x и y: $\;|f'_x(x,\, y)| \le M$.

Пусть y и $y + \Delta y$ лежат в интервале $[c,\, d]$. По определению

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)dx, \qquad F(y+\Delta y) = \int\limits_a^b f(x,\, y+\Delta y)dx.$$

Приращение функции $F(y)$ равно

$$F(y+\Delta y)=\int\limits_a^b (f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y))\,dx.$$

Подынтегральное выражение преобразуем по теореме Лагранжа

$$f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y)=f'_y(x,\,\xi)\Delta y,$$

где $\xi\in[y,\,y+\Delta y]$. Учитывая предполагаемое условие ограниченности производной f'_y, придем к неравенству

$$|f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y)|\le M|\Delta y|.$$

Так как модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции (см. п. 90, II), то

$$|F(y+\Delta y)-F(y)|=\Big|\int\limits_a^b (f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y))\,dx\Big|\le\int\limits_a^b M|\Delta|dx=M(b-a)|\Delta|.$$

Отсюда следует, что если $\Delta y\to 0$, то и $F(y+\Delta y)-F(y)->0$. т.е. что функция $F(y)$ непрерывна. Мы будем пользоваться теоремой в том виде, в каком она сформулирована, хотя ее доказательство проведено в упрощающем предположении. Отметим еще, что в ходе доказательства существенно использовалась конечность интервала интегрирования $[c,\,d]$. Часто условие непрерывности интеграла, зависящего от параметра, записывают в виде

$$\lim_{\xi\to y_0}\int\limits_a^b f(x,\,\xi)dx=\int\limits_a^b f(x,\,y_0)dx,$$

выражающем тот факт, что предел непрерывной функции $F(\xi)$ при $\xi\to y_0$ равен значению этой функции при $\xi=y_0$.

При пользовании этой теоремой нужно внимательно следить за выполнением всех ее условий. Так, например, пусть

$$F(y)=\int\limits_0^1\frac{y\,dx}{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

Эта функция непрерывна при всех значениях y, кроме $y=0$; дело в том, что подынтегральная функция $f(x,\,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ разрывна при $x=0$ и $y=0$.

Чтобы функция $F(y)$ была дифференцируемой, нужно предъявить дополнительные требования к функции $f(x,\,y)$.

Теорема II. Если функция $f(x,\, y)$ и ее частная производная $f'_y(x,\, y)$ непрерывны при $a \le x \le b$ и $c \le y \le b$, то функция $F(y)$ имеет непрерывную производную $F'(y)$ и справедлива формула

$$F'(y) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^b f(x,\, y)dx = \int\limits_a^b f'_y(x,\, y)dx.$$

Доказательство. Вернемся к формуле (**), выражающей приращение функции $F(y)$, и разделим обе ее части на Δy; преобразовывая затем подынтегральное выражение по теореме Лагранжа, получим

$$\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \int\limits_a^b f'_y(x,\, \xi)\, dx.$$

Так как $\xi \in (y,\, y+\Delta y)$, то при $\delta y \to 0$ значение $\xi \to y$. Поэтому, переходя к пределу при $\delta y \to 0$, запишем

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \lim_{\xi \to y}\int\limits_a^b f'_y(x,\, \xi)\, dx.$$

По условию теоремы производная $f'_y(x,\, y)$ непрерывна; поэтому предел правой части существует (см. формулу ("**)); значит, существует предел и левой части равенства, а это и есть как раз производная $F'(y)$, и эти пределы равны между собой:

$$F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,\, y)\, dx.$$

Теорема доказана. Коротко ее формулируют так: *производная от интеграла по параметру равна интегралу от производной подынтегральной функции по этому параметру.*

(По Бугрову-Никольскому)

Требуется доказать существование предела

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \int\limits_c^d f'_x(x,\, y)dy.$$

Предлагается применить формулу Ньютона-Лейбница в виде

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) = \int\limits_0^h \varphi'(x+u)\, du.$$

имеем

$$\Lambda = \Big|\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \int\limits_c^d f'_x(x,\, y)\, dy\Big| = \Big|\int\limits_c^d \frac{\Delta_x f(x,\, y)}{\Delta x}\, dy - \int\limits_c^d f'_x(x,\, y)\, dy\Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_c^d \left(\frac{1}{\Delta x} \int\limits_0^{\Delta x} f'_x(x+u,\, y)\, du \right) dy - \int\limits_c^d f'_x(x,\, y)\, dy \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_c^d \frac{1}{\Delta x} \int\limits_0^{\Delta x} (f'_x(x+u,\, y) - f'_x(x,\, y))\, du\, dy \Big|.$$

Так как $f'_x(x,\, y)$ непрерывна на $|\Delta|$, то она равномерно непрерывна на Δ, поэтому

$$|f'_x(x,\, y) - f' - x(x+u,\, y)| < \varepsilon$$

как только $|u| \leq |\Delta x| < \delta$ для любых $(x,\, y) \in \Delta$. Поэтому

$$\Lambda \leq \int\limits_c^d \frac{1}{|\Delta x|} \Big| \int\limits_0^{\delta x} \varepsilon\, du \Big|\, dy = \varepsilon(d-c).$$

при $|\Delta x| < \delta$. Доказано.

Это предложение называется **правилом Лейбница**; именно на него мы ссылались в сноске на стр. 389.

Правило Лейбница иногда применяется для отыскания сложных определенных интегралов.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_0^1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{1}{a}.$$

Дифференцируя обе части равенства по параметру a, причем дифференцирование интеграла совершается по правилу Лейбница, т. е. путем дифференцирования подынтегрального выражения , получим

$$\int\limits_0^1 \frac{-2a\, dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2} \left(-\frac{1}{a^2}\right),$$

откуда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2+1)}.$$

Продолжая дифференцирование, мы сможем вычислить интегралы $\int_0^1 \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $\quad n = 3,\, 4 \ldots$ Вычисление их без применения правила о Лейбница привело бы к гораздо более громоздким выкладкам.

До сих пор мы рассматривали интегралы, у которых пределы интегрирования были постоянны Встречаются, однако, и такие интегралы, у которых пределы интегрирования сами являются некоторыми функциями того параметра, от которого зависит подынтегральная функция. Как раз это имеет место при вычислении внутреннего интеграла при сведении двойного интеграла к повторному.

Пусть

$$F(\lambda) = \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\,\lambda)\,dx.$$

Будем считать, что подынтегральная функция $f(,\lambda)$ и ее частная производная $f'_\lambda(,\lambda)$ непрерывны при всех рассматриваемых значениях и λ, п пределы интегрирования $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ вместе со своими производными-тоже непрерывные функции от λ. Тогда функция $F(\lambda)$ непрерывна, дифференцируема и ее производная равна

$$F'(\lambda) = \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_\lambda(x,\,\lambda)\,dx + a'(\lambda)f(a(\lambda),\,\lambda) - b'(\lambda)f(b(\lambda),\,\lambda)$$

(общее правило Лейбница) Доказывать эту формулу мы не будем; отметим только, что приведенная выше формула для случая постоянных пределов интегрирования, а также теорема о дифференцировании интеграла по его верхнему пределу (см. п. 91) являются ее частными случаями.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Приведенные выше теоремы относятся, как уже было отмечено, к интегралам с конечными пределами и с непрерывной подынтегральной функцией. Для несобственных интегралов дело обстоит значительно сложнее. Мы ограничимся рассмотрением наиболее часто встречающихся несобственных интегралов вида

$$F(y) = \int_0^\infty f(x,\,y)dx$$

Областью определения функции $F(y)$ служит совокупность значений y, при которых нтеграл (*) сходится. Как правило, это некоторый интервал, конечный или бесконечный.

Начнем с примера. Пусть

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-x\cdot y^2}dx = \frac{e^{-xy^2}}{-y^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{y^2}.$$

($e^{-xy^2} \to 0$ при $x \to +\infty$). Подынтегральная функция непрерывна при всех значениях x и y; функция же F имеет бесконечный разрыв при $y = 0$.

Сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\,dx,$$

т.е. существование предела

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x,\,y)\,dx,$$

при каждом $y \in [c,\, d]$, позволяет рассматривать выражение (), как функцию переменной y на $[c,\, d]$. Однако, свойства этой функции существенно зависят от наличия *равномерной сходимости* интеграла по y на $[c,\, d]$.

Объяснить переход от обычной сходимости по опред. предела к остатку интеграла.

$$\Big| J(y) - \int\limits_a^{+\infty} \Big| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_0 > 0 | \Big| \int\limits_\alpha^{+\infty} \Big| < \varepsilon,\ \alpha > \alpha_0$$

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$, зависящий от параметра y, называется *равномерно сходящимся* на $[c,\, d]$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать $\alpha_0 > 0$ такую, что при всех рассматриваемых значениях $y \in [c,\, d]$ и $\alpha \geq \alpha_0$ соблюдается неравенство $|\int\limits_\alpha^\infty f(x,\, y)\, dx| < \varepsilon$.

Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Абеля - Дирихле.

!! Примеры "позитивные"и "негативные". Интегралы

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} dx$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx$$

сходятся равномерно при всех???? значениях λ, так как модули подынтегральных функций не превосходят положительной функции , интеграл от которой сходится(признак сходимости).

Для равномерно сходящихся несобственных интегралов (*) имеют следующие свойства.

1. Если функция $f(x,\, y)$ непрерывна при $x \geq a$ и $y \in [c,\, d]$ интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,\, y)\, dx$ сходится равномерно, то он является непрерывной функцией параметра y.

$$\begin{aligned}
&\Big| J(y+h) - J(y) \Big| = \\
&\quad = \Big| \int\limits_a^\alpha f(x,\, y+h)\, dx + \int\limits_\alpha^{+\infty} f(x,\, y+h)\, dx - \Big(\int\limits_a^\alpha f(x,\, y)\, dx + \int\limits_\alpha^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big) \Big| \leq \\
&\quad \leq \Big| \int\limits_a^\alpha \Big(f(x,\, y+h)\, dx - f(x,\, y) \Big) dx \Big| + \Big| \int\limits_\alpha^{+\infty} f(x,\, y+h)\, dx \Big| + \Big| \int\limits_\alpha^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big| \leq \\
&\qquad\qquad \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \int\limits_a^\alpha \Big| f(x,\, y+h)\, dx - f(x,\, y) \Big| dx < \varepsilon \quad (1)
\end{aligned}$$

Равенство справедливо при любом α. Первое неравенство есть свойство модуля суммы. Следующее неравенство верно для $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$ в силу равномерной сходимости несобственного интеграла. Наконец, последнее верно для $0 \geq h < \delta(\varepsilon)$ в силу непрерывности подинтегральной функции на отрезке $[a,\, \alpha]$.

Доказали непрерывность функции $J(y)$ на $[c,\, d]$.

2. Можно интегрировать "под знаком интеграла".

Непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

$$I = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big)\, dy.$$

Разобьем внутренний интеграл на два

$$I = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^{\alpha} f(x,\, y)\, dx \Big)\, dy + \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big)\, dy.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $\alpha_0(\varepsilon)$ так, чтобы было

$$\Big| \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big| \leq \frac{\varepsilon}{d-c}, \quad \alpha \geq \alpha_0.$$

Тогда справедливо

$$\Big| I - \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^{\alpha} f(x,\, y)\, dx \Big)\, dy \Big| = \Big| \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big)\, dy \Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_c^d \Big| \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big|\, dy \leq (d-c) \frac{\varepsilon}{d-c} = \varepsilon \quad (2)$$

При интегрировании непрерывной функции по прямоугольной области порядок интегрирования можно сменить. Поэтому

$$\Big| I - \int\limits_a^{\alpha} \Big(\int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy \Big)\, dx \Big| < \varepsilon \quad (3)$$

Это значит, что сходится несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^{+\infty} \Big(\int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy \Big)\, dx$$

или

$$\int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \Big)\, dy = \int\limits_a^{+\infty} \Big(\int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy \Big)\, dx$$

3. Если при этом функция $f(x,\, y)$ имеет в рассматриваемой области непрерывную частную производную $f'_y(x,\, y)$ и интеграл от этой производной тоже сходится равномерно на $[c,\, d]$, то функция $F(y)$ дифференцируема и справедлива формула (Лейбница для НИ)

$$F'(y) = \frac{d}{dx}\int_a^\infty f(x,\, y)\, dx = \int_a^\infty f'_y(x,\, y)\, dx.$$

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,\, \xi)\, dx = \int\limits_a^{\alpha} f'_y(x,\, \xi)\, dx + \int\limits_\alpha^{+\infty} f'_y(x,\, \xi)\, dx.$$

Оценим отношение приращений

$$\Big|\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}\Big| \le \Big|\int\limits_a^{\alpha} f'_y(x,\, \xi)\, dx\Big| + \Big|\int\limits_\alpha^{+\infty} f'_y(x,\, \xi)\, dx\Big|.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $\alpha_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\alpha \ge \alpha_0$

$$\Big|\int\limits_\alpha^{+\infty} dx\Big| < \varepsilon,$$

что возможно в силу равномерной сходимости последнего интеграла. Далее, используем непрерывность функции $f'_y(x,\, y)$.

$$\Big|\int\limits_a^{\alpha} f'_y(x,\, \xi)\, dx\Big| \le \int\limits_a^{\alpha} \Big|f'_y(x,\, \xi)\Big|\, dx \le \varepsilon$$

для достаточно малых $\xi/$

Пример Интеграл Пуассона, встречающийся при решении задач математической физики

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\lambda x\, dx.$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ получаем интеграл $I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычисленный в п. 131. Интеграл (*) равномерно сходится, так как $|e^{-x^2}\cos\lambda x| \le e^{-x^2}$.

Дифференцируя интеграл (*), получим

$$I'(\lambda) = -\int_0^\infty x e^{-x^2}\sin\lambda x\, dx.$$

Это действие законное, так как последний интеграл тоже сходится равномерно(?).

Действительно $|xe^{-x^2}\sin\lambda x| \le xe^{-x^2}$, а интеграл $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = -\dfrac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^\infty = \dfrac{1}{2}$. Интеграл, выражающий $I'(\lambda)$, проинтегрируем по частям. Тогда

$$I'(\lambda) = -\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin\lambda x\,dx = \begin{vmatrix} u=\sin\lambda x & du=\lambda\cos\lambda x \\ dv = xe^{-x^2}dx & v=-\dfrac{1}{2}\,e^{-x^2}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{-x^2}\sin\lambda x\Big|_0^\infty - \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\lambda x\,dx.$$

Внеинтегральный член равен нулю и при $x = 0$, и при $x \to \infty$, а последний интеграл есть снова $I(\lambda)$. В результате мы приходим к соотношению $I'(\lambda) = -\dfrac{\lambda}{2}\,I(\lambda)$, которое перепишем в виде

$$\frac{I'(\lambda)}{I(\lambda)} = (\ln I(\lambda))' = -\frac{\lambda}{2}.$$

Интегрируя, найдем, что $\ln I(\lambda) = -\dfrac{\lambda^2}{4} + C$. При $\lambda = 0$ интеграл $I(0)$ равен $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; поэтому $C = \ln\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Окончательно $\ln I(\lambda) = -\dfrac{\lambda^2}{4} + \ln\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ и

$$I(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

Пример. Задана функция $y(x) = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$. Используя ее производную, построить фрагмент графика $y(x)$ на $[-1,\,1]$.

Решение

Найдем производную $y'(x)$, применяя правило Лейбница. Получим:

$$y'(x) = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\alpha\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\alpha x\,d\alpha = \frac{\sin\alpha x}{x}\Big|_{\pi}^{2\cdot\pi} = \frac{\sin 2\pi x - \sin\pi x}{x}.$$

В точке $x_0 = 0$ это выражение доопределяем по непрерывности: $y'(0) = \pi$. Что, кстати, получается и при аккуратном выполнении интегрирования.

Теперь решаем уравнение $\sin 2\pi x - \sin\pi x = 0$. Получим

$$\sin 2\pi x - \sin\pi x = 2\sin\frac{3\pi}{2}x\cdot\sin\frac{\pi}{2}x.$$

На отрезке $[-1,\,1]$ будет два корня $\pm\dfrac{2}{3}$. первый соответствует локальному минимуму, а второй — максимуму.

Интеграл Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Интеграл Дирихле $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx = \dfrac{\pi}{2}$

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \;\; \alpha > 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
$\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx \;\; n \in \mathbb{N}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$	$\frac{\pi}{2}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx \; a > 0 \; b > 0$	$\frac{\pi}{2}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$	$\frac{\pi}{4}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$	$\frac{\pi}{4}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$	$\frac{\pi}{4}$
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx$	$\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int\limits_0^{\pi} x \ln \sin x\,dx$	$-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x\,dx$	$\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$	$\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$-\frac{\pi}{2}\ln 2$