Лекции по математическому анализу

Лекция 9. Формула Тейлора и ее применение

Крохин А.Л.

УрФУ—РИ-РтФ

01.09.2010

Если функция f имеет в точке x_0 производную, то ее приращение может быть представлено в виде

$$\Delta f = \alpha \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ и $\alpha = f'(x_0)$.
Иначе говоря, для функции f существует многочлен первой степени $P_1(x)$ такой, что

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \text{ и } P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = f'(x_0).$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Поставим задачу построить многочлен более высокого порядка,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n, \quad (1)$$

который бы обладал следующими свойствами

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), \quad P_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots, \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (2)$$

Поставим задачу построить многочлен более высокого порядка,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad (1)$$

который бы обладал следующими свойствами

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), \quad P_n''(x_0) = f''(x_0), \dots,$$
$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (2)$$

Будем последовательно дифференцировать (1) и использовать условия (2).

Получим для коэффициентов

Получим для коэффициентов

$$a_0 = f(x_0),$$

Получим для коэффициентов

$$a_0 = f(x_0),$$

$$\left(a_1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x - x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}\right)\Big|_{x=x_0} = \\ = a_1 = f'(x_0),$$

Получим для коэффициентов

$$a_0 = f(x_0),$$

$$\left(a_1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x - x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}\right)\Big|_{x=x_0} = \\ = a_1 = f'(x_0),$$

$$\big(2 \cdot a_2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) + a_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \\ + a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}\big)\Big|_{x=x_0} = 1 \cdot 2 \cdot a_2 = f''(x_0),$$

Получим для коэффициентов

$$a_0 = f(x_0),$$

$$\left(a_1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}\right)\Big|_{x=x_0} = \\ = a_1 = f'(x_0),$$

$$\left(2 \cdot a_2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) + a_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \right. \\ \left. + a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}\right)\Big|_{x=x_0} = 1 \cdot 2 \cdot a_2 = f''(x_0),$$

$$\dots,$$

$$n! \cdot a_n = f^{(n)}(x_0).$$

Определение:

Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют *многочленом Тейлора* функции f.

Определение:

Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют *многочленом Тейлора* функции f.

Равенство

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) \end{aligned} \qquad (3)$$

Определение:

Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют *многочленом Тейлора* функции f.

Равенство

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) \end{aligned} \tag{3}$$

называют формулой Тейлора, а $r_n(x)$ - остаточным членом.

Пусть функция f , а значит и r_n n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 (производная $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0)
и

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Пусть функция f , а значит и r_n n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 (производная $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0)
и

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Оценим порядок малости остаточного члена $r_n(x)$.

Пусть функция f , а значит и r_n n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 (производная $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0)
и

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Оценим порядок малости остаточного члена $r_n(x)$.

Из теоремы Лагранжа следует

$$r_n(x) = r_n(x) - r_n(x_0) = r_n'(\xi_1)(x - x_0), \quad \xi_1 \in S(x_0),$$

ξ_1 между x и x_0.

Пусть функция f, а значит и r_n n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 (производная $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0)
и

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Оценим порядок малости остаточного члена $r_n(x)$.

Из теоремы Лагранжа следует

$$r_n(x) = r_n(x) - r_n(x_0) = r_n'(\xi_1)(x - x_0), \quad \xi_1 \in S(x_0),$$

ξ_1 между x и x_0.

В свою очередь

$$r_n'(\xi_1) = r_n'(\xi_1) - r_n'(x_0) = r_n''(\xi_2)(x - x_0), \quad \xi_2 \in S(x_0)$$

ξ_2 между ξ_1 и x_0.

Пусть функция f , а значит и r_n n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 (производная $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0)
и

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Оценим порядок малости остаточного члена $r_n(x)$.

Из теоремы Лагранжа следует

$$r_n(x) = r_n(x) - r_n(x_0) = r_n'(\xi_1)(x - x_0), \quad \xi_1 \in S(x_0),$$

ξ_1 между x и x_0.

В свою очередь

$$r_n'(\xi_1) = r_n'(\xi_1) - r_n'(x_0) = r_n''(\xi_2)(x - x_0), \quad \xi_2 \in S(x_0)$$

ξ_2 между ξ_1 и x_0.

Продолжая, получим

$$r_n(x) = r_n(x) - r_n(x_0) = r_n^{(n)}(\xi_n)(x - x_0)^n, \quad \xi_n \text{ между } x \text{ и } x_0.$$

Составим отношение и найдем предел

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

Составим отношение и найдем предел

$$\lim_{x\to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$\lim_{x\to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{(x-x_0)^n} =$$

Составим отношение и найдем предел

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} r_n^{(n)}(\xi_n) = r^{(n)}(x_0) = 0$$

или $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Составим отношение и найдем предел

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x - x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} r_n^{(n)}(\xi_n) = r^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\text{или } r_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Итак, остаточный член в форме Пеано имеет порядок малости $o((x - x_0)^n)$.

Составим отношение и найдем предел

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} r_n^{(n)}(\xi_n) = r^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\text{или } r_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

Итак, остаточный член в форме Пеано имеет порядок малости $o((x-x_0)^n)$. Полученная форма отражает только порядок малости остаточного члена и полезна лишь при нахождении пределов.

Для приближенных вычислений значений функции по формуле Тейлора необходимо знать погрешность, связанную с отбрасыванием остаточного члена.

Для приближенных вычислений значений функции по формуле Тейлора необходимо знать погрешность, связанную с отбрасыванием остаточного члена.

Найдем простой функциональный вид для $r_n(x)$.
Будем считать, что f имеет непрерывные производные до порядка n включительно на отрезке $[x_0, x] \quad ([x, x_0])$ и производную $f^{(n+1)}$ во внутренних точках этого отрезка.

Для приближенных вычислений значений функции по формуле Тейлора необходимо знать погрешность, связанную с отбрасыванием остаточного члена.

Найдем простой функциональный вид для $r_n(x)$.
Будем считать, что f имеет непрерывные производные до порядка n включительно на отрезке $[x_0, x]$ $([x, x_0])$ и производную $f^{(n+1)}$ во внутренних точках этого отрезка.

Составим отношение и применим к нему несколько раз формулу Коши.

$$\frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} == \frac{r_n'(\xi_1) - r_n(x_0)}{(n+1)(x-x_0)^n} = \frac{r_n''(\xi_2) - r_n''(x_0)}{(n+1)n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$\dots \frac{r_n^{(n)}(\xi_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)n(n-1)\cdot\dots\cdot 2(x-x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Здесь $x_0 < \xi < \xi_n < \dots < \xi_1 < x$ и учтено, что $T^{(n+1)} = 0$.

Итак, остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Следующие формулировки используются в одном и том же смысле.

Разложить функцию	по формуле Тейлора (3)
	по степеням $x - x_0$
	в окрестности точки x_0

Следующие формулировки используются в одном и том же смысле.

Разложить функцию	по формуле Тейлора (3)
	по степеням $x - x_0$
	в окрестности точки x_0

Разложение для каждого x_0 надо получать отдельно, что очень неудобно. Поэтому обычно выбирается "стандартная"точка $x_0 = 0$.

Следующие формулировки используются в одном и том же смысле.

Разложить функцию	по формуле Тейлора (3)
	по степеням $x - x_0$
	в окрестности точки x_0

Разложение для каждого x_0 надо получать отдельно, что очень неудобно. Поэтому обычно выбирается "стандартная"точка $x_0 = 0$. Формулу

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (4)$$

называют формулой Маклорена.

Несколько справочных формул

Разложения в окрестностях других точек можно легко получить из (4).

Несколько справочных формул

Разложения в окрестностях других точек можно легко получить из (4).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad (5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n + o(x^n) \qquad (8)\end{aligned}$$

Более сложный случай:

Более сложный случай:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} sin^2 x + \frac{1}{6} sin^3 x + o(x^3).$$

Более сложный случай:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} sin^2 x + \frac{1}{6} sin^3 x + o(x^3).$$

Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4)$$

Более сложный случай:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} sin^2 x + \frac{1}{6} sin^3 x + o(x^3).$$

Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Более сложный случай:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} sin^2 x + \frac{1}{6} sin^3 x + o(x^3).$$

Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Окончательно:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Вычисление предела $x \to a$ надо начинать с "примерки" значения $x = a$ для выражения, стоящего под знаком предела. Подставляем a вместо x и пробуем вычислить.

Вычисление предела $x \to a$ надо начинать с "примерки" значения $x = a$ для выражения, стоящего под знаком предела. Подставляем a вместо x и пробуем вычислить. Получилось — значит функция непрерывная (всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения, а сумма, разность, произведение, отношение (!) и композиция непрерывных функций также непрерывна) в a, и предел равен ее значению. Задача решена.

Вычисление предела $x \to a$ надо начинать с "примерки" значения $x = a$ для выражения, стоящего под знаком предела. Подставляем a вместо x и пробуем вычислить. Получилось — значит функция непрерывная (всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения, а сумма, разность, произведение, отношение (!) и композиция непрерывных функций также непрерывна) в a, и предел равен ее значению. Задача решена.
Какие возможны осложнения? Для суммы или разности — одна или обе функции бесконечно большие. Воспользуемся теоремами о пределах. Единственный случай, не "накрываемый" этими теоремами,

$$\lim(f_1(x) - f_2(x)),$$

при условии $\lim f_1(x) = \infty, \quad \lim f_2(x) = \infty$. В зависимости от свойств конкретных функций предел может не существовать вообще, может быть бесконечным или конечным. Получилась *неопределенность*, символом $(\infty - \infty)$ указывается ее *тип*, поскольку есть и другие типы *неопределенностей*, описанные ниже.

Вычисление предела отношения двух функций приводит к неопределенности типа "$\dfrac{\infty}{\infty}$" и "$\dfrac{0}{0}$ если обе функции бесконечно большие или обе бесконечно малые. Прочие комбинации приводят ко вполне определенному результату на основании теорем о пределах. Например, отношение функции, имеющей конечный предел, к бесконечно большой есть бесконечно малая и т. п.
Для произведения функций теоремы о пределах не дают определенного результата только когда один из сомножителей бесконечно малая, а другой — бесконечно большая. Пишем "неопределенность типа $(0 \cdot \infty)$".

Наконец, еще три типа неопределенностей (1^∞), (0^0), (∞^0) появляются при вычислении предела выражения $f(x)^{\varphi(x)}$
На практических занятиях мы искали предел подобного выражения, переходя к его логарифму

$$\ln f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\ln f(x).$$

Неопределенность $0 \cdot \infty$ возможна в трех случаях: обе функции бесконечно малые$\left(0^0\right)$; $\lim f(x) = 1$, а φ – бесконечно большая(1^∞);$f(x)$ бесконечно большая и $\varphi(x)$ бесконечно малая$\left(\infty^0\right)$.

Рассмотрим задачу нахождения предела отношения двух бесконечно малых функций. Последнее, как мы знаем, означает всего лишь, что пределы этих функций в соответствующей точке равны нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$$

Запишем числитель и знаменатель в виде разложения по формуле Тейлора, ограничиваясь лишь первым ненулевым слагаемым. Его называют *главным членом* разложения:

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\ a\neq 0;$$

$$\varphi(x)=b(x-x_0)^m+o\left((x-x_0)^m\right),\ b\neq 0.$$

Дальнейшее понятно

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)}{b(x-x_0)^m+o\left((x-x_0)^m\right)}=$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m;\\ \dfrac{a}{b}, & \text{если } n=m;\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-1}-2x}{x-\sin x}$.

Используя формулы

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\\ e^{-x} &= 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3), \end{aligned}$$

получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-1}-2x}{x-\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}\right)-\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3!}\right)-2x+o(x^3)}{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}{1+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}=2.$$

Неопределенность типа $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2-x^2}{x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}=$$

Оставляем лишь главную часть, остальные слагаемые более высокого порядка малости

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2\frac{x^4}{3!}+o(x^4)-x^2}{x^2\left(x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{x^4}{3!}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{x^4}{3!}}{x^4}=-\frac{1}{3}.$$

Неопределенность типа $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{x}{3}+o(x)-\left(1+\dfrac{x}{5}+o(x)\right)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5}+o(x)}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Имеем неопределенность типа 1^{∞}. Используем предварительное логарифмирование

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+o(x^2)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+o(x))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Окончательно

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Исследование функций

Цель: по заданному аналитическому выражению изучить основные свойства функции. Затем построить ее график, т.е. представить полученные результаты в наглядно воспринимаемой форме. Основные свойства — это те, которые перечислены в известной со школы **схемы исследования** функции.

Монотонность и экстремумы