Лекции по математическому анализу

Лекция 12. Неопределенный интеграл

Крохин А.Л.

УрФУ—РИ-РтФ

01.09.2010

Мотивация Главная проблема — найти функцию по известной производной.

Функция $f(x)$ определена на интервале I, найти функцию $F(x)$, определенную на I и удовлетворяющую условию

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

для каждого $x \in I$.

Theorem (о непрерывности первообразной)

Пусть F первообразная некоторой функции f на интервале I. Тогда функция F непрерывная на I. Это следует из дифференцируемости первообразной и из того факта, что дифференцируемость влечет непрерывность.

Пример 1.

- Функция $y = x^2 + 1$ имеет первообразную $y = \dfrac{x^3}{3} + x$.
  Действительно, $\left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)' = x^2 + 1$.
- То же и для $y = \dfrac{x^3}{3} + x - 5$. Действительно,
  $\left(\dfrac{x^3}{3} + x - 5\right)' = x^2 + 1$.

Утверждение 1. *[Линейность НИ] Пусть f, g — интегрируемые на I функции и c — действительное число. Тогда на I имеют место равенства*

$$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Утверждение 2. *[сложная функция] Пусть f — интегрируемая на I и F — ее первообразная. Тогда*

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

для каждого x, для которого $ax+b \in I$, где C — произвольная постоянная.

Утверждение 3. *[логарифмическая производная] Пусть f дифференцируемая функция, не обращающаяся в нуль в открытом интервале I ш $f'(x)$ ее производная на I. Тогда на I*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Табличные интегралы

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ (here } n = 1\text{)}$$
$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

- $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$
- $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x$

Интегрирование: техника

Найти $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$
\begin{aligned}
I &= \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C \\
&= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + C
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Найти } \int \frac{x^2+4}{x}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+4}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int x + \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + C
\end{aligned}$$

В предыдущем примере нам известны первообразные и числителя и знаменателя

$$\int (x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 4x + C_1,$$

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Но это *практически бесполезно*, нет формулы интегрирования дроби аналогичной формуле дифференцирования. Предварительно подынтегральное выражение упрощается и используются свойства НИ.

$$\boxed{\text{Найти } \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x.}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

Пример 2.

Найти $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C
\end{aligned}
$$

Используем равенство $(x^2+4x+5)'=2x+4$. В числителе не хватает множителя. Домножим и разделим на 2. Приведем интеграл к виду $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$. Воспользуемся $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$

Пример 3. $\boxed{\text{Найти } \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cdot 5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 5\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

- Замечаем, что в числителе можно выделить производную от знаменателя.
- Приведем к табличному $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.
- Для чего разобъем дробь на сумму двух.
- Получаем два табличных интеграла:
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$
- $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$

Дробно-рациональная функция

Следующей темой нашей лекции будет задача интегрирования дробно-рациональной функции. Напомним, что дробно-рациональная функция(сокр. ДРФ ил просто *дробь*) это функция вида $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ — многочлен n-ой степени и $Q_m(x)$ — многочлен m-ой степени($m > 0$).

Определение. [правильные и неправильные дроби] Рассмотрим ДРФ $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. ДРФ $R(x)$ называют *правильной* дробью если $n < m$ и *неправильной* в противном случае.

Утверждение 4. *[разложение неправильной дроби] Неправильная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби.*

Это разложение выполняется в процессе деления числителя на знаменатель "уголком". Частное от деления — целая часть, а остаток будет числителем правильной дроби. После этого проблема интегрирования ДРФ сведется к интегрированию правильной дроби — многочлен интегрируется почленно по одной из табличных формул. Для интегрирования же правильной дроби требуется знание корней знаменателя.

В настоящем курсе мы не будем рассматривать случай кратных комплексных корней знаменателя.

Выполняя приведение к общему знаменателю и сложение дробей в левой части равенства, можем убедиться в его справедливости при любых допустимых x

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}=\frac{x}{x^4-1}.$$

Как вы думаете, выражение в какой части равенства проще? Вопрос не очень корректен — вычислять значение наверное быстрее, подставляя вместо x число в правой части. Три умножения, одно вычитание и еще деление. Всего 5 операций. В левой части операций значительно больше. А вот интегрировать конечно легче *левое* выражение. Понадобятся только основные табличные интегралы.

Утверждение 5. *[разложение правильной несократимой дроби на сумму простейших дробей]*
Пусть ДРФ $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *— правильная. Пусть также многочлены* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ *не имеют общих корней. Такую дробь называют несократимой. Ограничимся случаем, когда* $Q_m(x)$ *имеет только действительные корни (как простые, так и кратные) и простые кратные. Тогда* $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *единственным образом представляется в виде суммы простейших дробей, причем*

- каждому простому корню c знаменателя $Q_m(x)$ соответствует дробь

$$\frac{A}{x-c},$$

где A - некоторое действительное число;

- каждому k-кратному корню c знаменателя $Q_m(x)$ соответствует k дробей вида

$$\frac{A_1}{x-c}, \ \frac{A_2}{(x-c)^2}, \ \dots, \ \frac{A_k}{(x-c)^k},$$

где A_i - некоторые действительные числа;

- каждой простой паре комплексно-сопряженных корней знаменателя $Q_m(x)$ соответствует дробь вида

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

где M и N действительные числа $p^2-4d<0$.

Определение. [простейшие дроби]
Дроби, представленные ниже, называют простейшими дробями.
Дроби

$$\frac{A_1}{x-c} \text{ - первого типа,} \quad \frac{A_k}{(x-c)^k},\ k>1 \text{ - второго типа,}$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \text{ - третьего типа,} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ k>1 \text{ - четвертого типа.}$$

Дроби четвертого типа появляются в разложении при наличии кратных комплексных корней знаменателя. В нашем курсе они рассматриваться не будут, но в любом учебнике по математическому анализу с ними можно ознакомиться.

Пример 4. Несколько частных случаев.

$$\frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}, \ \{0,\ 1,\ -3\}$$

- простые корни знаменателя;

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}, \quad x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$\{1\}$ - простой корень,

x^2+x+1 - имеет комплексно сопряженные корни;

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2},$$

$\{0,\ 1\}$ - корни кратности два каждый;

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Здесь пара простых комплексно-сопряженных корней

и действительный двукратный.

[интегралы от простейших дробей] Простейшие дроби первых двух типов интегрируются с помощью табличных интегралов.

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + C, \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C, \quad \text{for } n > 1. \tag{4}$$

Немного сложнее интегрирование дроби третьего типа. Для лучшего понимания используемых при этом преобразований, рассмотрим несколько частных случаев.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{(x+m)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+m}{a}. \tag{6}$$

Интегрирование дроби третьего типа более общего вида можно свести к уже рассмотренным примерам. Для знаменателя вида $x^2 + a^2$, можно записать

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{2}\,\frac{2x}{x^2 + a^2} + B\frac{1}{x^2 + a^2}\right)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Первый интеграл — (2), второй — (5).

Если в знаменателе стоит квадратный трехчлен, то мы делаем следующее.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \left(\frac{2x+M}{x^2+Mx+N} + \frac{-N+2B/A}{x^2+Mx+N}\right)\mathrm{d}x. \quad (7)$$

Если в знаменателе стоит квадратный трехчлен, то мы делаем следующее.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \left(\frac{2x+M}{x^2+Mx+N} + \frac{-N+2B/A}{x^2+Mx+N}\right)\mathrm{d}x. \qquad (7)$$

Первое слагаемое подведением под знак дифференциала сводится к табличному случаю (2)

$$\frac{A}{2}\int \frac{2x+M}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+Mx+N)}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+Mx+N \qquad (8)$$

Если в знаменателе стоит квадратный трехчлен, то мы делаем следующее.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+Mx+N}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \Big(\frac{2x+M}{x^2+Mx+N} + \frac{-N+2B/A}{x^2+Mx+N}\Big)\,\mathrm{d}x. \quad (7)$$

Второе слагаемое приводится к виду (6), выделением полного квадрата в знаменателе.

$$(B - \frac{AN}{2})\int \frac{1}{(x+M/2)^2+N-M^2/4}\,\mathrm{d}x. \quad (8)$$

Запишем подробно порядок интегрирования ДРФ.

Для вычисления НИ от ДРФ делаем следующее:
Если ДРФ неправильная — выполняем деление, получаем целую часть и правильную дробь. Целая часть — многочлен — интегрируется отдельно. Дробная часть может и отсутствовать, если числитель делится на знаменатель нацело.

Если правильная дробь — одна из простейших, то применяем соответствующий прием.
В противном случае разлагаем дробь на простейшие.

Запишем подробно порядок интегрирования ДРФ.

Для вычисления НИ от ДРФ делаем следующее:
Если ДРФ неправильная — выполняем деление, получаем целую часть и правильную дробь. Целая часть — многочлен — интегрируется отдельно. Дробная часть может и отсутствовать, если числитель делится на знаменатель нацело.

Если правильная дробь — одна из простейших, то применяем соответствующий прием.
В противном случае разлагаем дробь на простейшие.

Ищем корни знаменателя или раскладываем его на линейные и квадратичные множители. Это можно сделать, если знаменатель имеет только действительные и простые комплексные корни. Конечно, практически выполнить это можно только в некоторых специальных случаях(которые и будут предложены в учебных задачах).

При наличии разложения знаменателя на множители мы легко находим кратность корней и соответствующую структуру разложения на простейшие дроби.

При наличии разложения знаменателя на множители мы легко находим кратность корней и соответствующую структуру разложения на простейшие дроби.

множителю $(x-a)$ в сумме соответствует дробь $\dfrac{A}{x-a}$.

При наличии разложения знаменателя на множители мы легко находим кратность корней и соответствующую структуру разложения на простейшие дроби.

множителю $(x-a)$ в сумме соответствует дробь $\dfrac{A}{x-a}$.

Множителю $(x-a)^n$ соответствует сумма n дробей

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+,\ \ldots,\ +\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

При наличии разложения знаменателя на множители мы легко находим кратность корней и соответствующую структуру разложения на простейшие дроби.

множителю $(x-a)$ в сумме соответствует дробь $\dfrac{A}{x-a}$.

Множителю $(x-a)^n$ соответствует сумма n дробей

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+,\ldots,+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Множителю (x^2+px+q) соответствует дробь $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Пример 5. Найти $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.
Запишем разложение на простейшие дроби.

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}. \qquad (9)$$

Значения неизвестных можно найти *методом частных значений.* Для этого приведем правую часть к общему знаменателю $(x-1)(x+2)(x-2)$. Приравняем числители дробей в левой и правой части равенства

$$x^2+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2). \qquad (10)$$

Здесь есть маленькая тонкость. Тождественное равенство (9) не имеет смысла при значениях переменной x, обращающих знаменатель в ноль. Однако пределы числителей (10) в этих точках должны совпадать. Поскольку же для непрерывных функций пределы совпадают со значениями, мы можем просто подставить последовательно $x = 1$, $x = -2$ и $x = 2$ в (10).

Получим систему уравнений

1	$2 = A\,3\,(-1),$
-2	$5 = B\,(-3)\,(-4),$
2	$5 = 4C.$

с решениями $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{5}{12}$ и $C = \frac{5}{4}$. Следовательно

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = -\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{12}}{x+2} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2}.$$

Интегрирование дает

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{12}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| \\ &= \frac{1}{12}\Big(-8\ln|x-1| + 5\ln|x+2| + 15\ln|x-2|\Big) \\ &= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x+2)^5(x-2)^{15}}{(x-1)^8}\right| + C. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти $I_2 = \int \dfrac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

Дробь неправильная, разделим числитель на знаменатель

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}.$$

Далее будем рассматривать только правильную дробь в правой части. Найдем корни знаменателя и разложим дробь на простейшие

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}.$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю $x^2(x+1)$ и приравняем числители

$$x^2 - x + 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

Подставляя значения $x = 0$ и $x = -1$, получаем уравнения

$$1 = A,$$
$$3 = C.$$

Можно подставить еще какое-нибудь частное значение и найти B. Есть и другой способ — *метод неопределенных коэффициентов*.
Многочлены

$$x^2 - x + 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$$

равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{array}{c|cl} x^2 & 1 & = B + C, \\ x^1 & \text{-1} & = A + B, \\ x^0 & 1 & = A. \end{array}$$

Решая систему, получим те же значения, что и в методе частных значений.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \left(x - 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + 3\ln|x+1| \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{2x} + \ln\frac{|x+1|^3}{x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти $I_3 = \int \frac{x}{x^3 - 8}\,\mathrm{d}x$.

Раскладываем знаменатель $(x-2)(x^2+2x+4)$ на множители и записываем соответствующие простейшие дроби

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Домножая на общий знаменатель и приравнивая числители, получаем

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2) \tag{11}$$

и после подстановки $x = 2$ находим $2 = 12A$, т. е. $A = \frac{1}{6}$.
Раскрываем скобки (11)

$$x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 0 = A + B,\\ x^1: &\quad 1 = 2A - 2B + C,\\ x^0: &\quad 0 = 4A - 2C. \end{aligned}$$

Решение системы $B = -\frac{1}{6}$ and $C = \frac{1}{3}$. Итак,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\int \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{-3}{(x^2+2x+1)+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\ln|x^2+2x+4| + \frac{3}{6}\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Theorem (интегрируем произведение "по частям")

Пусть u и v дифференцируемые на интервале I функции. Тогда

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

если интеграл в правой части существует.

$P(x)$ — многочлен. Типичной будет следующая замена. Многочлен после дифференцирования становится "проще обозначим его за $u(x)$.

$$\int P(x)e^{\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x, \int P(x)\sin(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x, \int P(x)\cos(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x.$$

Соответственно, оставшаяся часть подынтегрального выражения — $\mathrm{d}v$.

А вот в следующих примерах

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x, \int P(x)\ln^m x\,\mathrm{d}x,$$

за $u(x)$ обозначим обратную тригонометрическую функцию или логарифм.

В некоторых случаях приходится пробовать ту или иную замену.

Отдельно можно упомянуть возвратные интегралы, после применения метода "по частям" мы возвращаемся к исходному интегралу.

Пример 8. [интегрируем по частям]

$$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}} = -(x^2+1)e^{-x} +$$

$$+\,2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}} = -(x^2+1)e^{-x} + 2\Big(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\Big)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C,$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Замена переменной

Theorem (подведение под знак дифференциала)

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале I, а $\varphi(t)$ дифференцируема на J и $\phi(J) = I$. Тогда для $t \in J$

$$\int f(\phi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

, где $x = \varphi(t)$.

При замене переменной (13) мы пишем x вместо $\varphi(t)$ и $\mathrm{d}x$ вместо $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ в данном интеграле. Другими словами, заменяя $\boxed{x = \varphi(t)}$,мы "подводим"$\varphi(t)$ под знак дифференциала $\boxed{\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$.

Theorem (подстановка)

Пусть $f(x)$ непрерывна на открытом интервале I, $\varphi(t)$ дифференцируема на J, не имеет стационарных точек и $\varphi(J) = I$. Тогда

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

веоно на I, где $t = \varphi^{-1}(x)$, в правой части. Здесь $\varphi^{-1}(x)$ — обычное обозначение обратной функции к $\varphi(x)$.

Пример 9. []

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{rl} 1-x^2 = & t \\ -2x\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = & -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$$

Пример 10. [тригонометрическая подстановка, нечетная степень в числителе]

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x &= \ \mathrm{d}t \\ \sin x\,\mathrm{d}x &= -\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2}t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Пример 11. [тригонометрическая подстановка, нечетная степень в знаменателе]

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{matrix} \cos x = t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{matrix}} = -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{(2+t)(1+t)(t-1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{6}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\ln|2$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{3}\ln(2+\cos x)$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C$$

Пример 12. [Иррациональная функция]

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \;\boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \tfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x &= \tfrac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\,\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1 + \frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1 - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \operatorname{arctg} t\right) + C$$

$$= 2\sqrt{3x+2} - \ln|3x+3| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3x+2} + C$$

Еще одна подстановка

$$\int R(e^x)\,\mathrm{d}x \boxed{\begin{aligned} e^x &= t \\ x &= \ln t \\ \mathrm{d}x &= \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int R(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ \mathrm{d}t \end{aligned}} = \int R(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 13. Предполагая $x > 0$, подставим $t = \sqrt{1 - x^2}$ в интегралы

$$I_0 = \int \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x, \qquad I_1 = \int x\sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int x^2\sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x, \qquad I_3 = \int x^3\sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Вычислим I_1 и I_3. (не надо I_0 и I_2)
$t = \sqrt{1-x^2}$ получим

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 - x^2 \\ x^2 &= 1 - t^2 \\ 2x\,\mathrm{d}x &= -2t\,\mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

не подходит для x^2, $\sqrt{1-x^2}\;x\,\mathrm{d}x$, так как

$$x^2 = 1 - t^2, \qquad \sqrt{1-x^2} = t, \qquad x\,\mathrm{d}x = -t\,\mathrm{d}t.$$

$$x = \sqrt{1-t^2}.$$

Пример 14. Вычислим $I_0 = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ подстановкой $x = \sin t$.
Решение: Т.к $x = \sin t$, то $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Рассматриваем интервал $[-\pi/2,\,\pi/2]$. На нём $\cos x \geqslant 0$. Получаем

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) = \frac{1}{2}(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) \\
&= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.
\end{aligned}$$

Были использованы тождества:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x.$$

Пример 15. Вычислить $\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x$ заменой $\operatorname{tg} x = t$.

Решение: Данная замена влечет

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= t \\ x &= \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x &= \int t^3 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int t - \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C \end{aligned}$$

Заметим, что можно было использовать и другую замену $\cos x = t$ 10. На первый взгляд результаты различаются, но можно убедиться, что различие в аддитивной константе.

RЗамену $t = \operatorname{tg} x$ можно применить и к $\int \operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}x$.

Пример 16. Применить замену(подстановку) $t = \operatorname{tg} x$ к интегралу $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x$.
Решение: Из условия и рекомендации следует, что $x = \operatorname{arctg} t$ и $\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Выразим функции $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} x$ и через t. $\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ и $\cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. Подставим

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t+1}{(t-1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Последний интеграл содержит ДРФ.

Пример 17. Применить подстановку $x = \operatorname{tg} t$ к интегралу $\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

Решение: При $x = \operatorname{tg} t$ $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, поэтому

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin^2+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Ну, а это.....

Подстановку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ называют универсальной тригонометрической. Она применима к интегралам вида

$$\int R(\sin x,\, \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Дело в том, что

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

В результате ее применения мы получаем интеграл от ДРФ.

Можно и проще.

$$\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$$

Вычисляют а) один из показателей нечетное положительное — $\sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

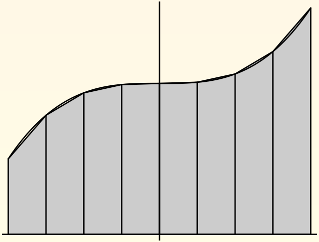
Задача о площади криволинейной трапеции

Площадь плоской фигуры можно рассматривать как некоторую ее числовую характеристику, понимая это в следующем смысле.
Имеется некоторое правило, по которому фигуре сопоставляется величина S, удовлетворяющая требованиям:
1)$S > 0$;
2) площадь фигуры равна сумме площадей ее частей, $S = S_1 + S_2$;
3) площади равных (совмещаемых) фигур равны;
4) для квадрата со стороной a площадь $S = a^2$.

Последнее свойство, в принципе, можно вывести, что и делается в школьном курсе математики. Исходя из этих свойств, можно вывести формулы для площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции.
Все эти фигуры ограничены отрезками прямых линий. В случае криволинейной границы (окружность, например) вывод соответствующих формул требует предельного перехода.

Криволинейная трапеция

Рассмотрим т. н. криволинейную трапецию.
Это фигура, ограниченная осью абсцисс, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, и графиком неотрицательной функции f.



Вычисляем площадь криволинейной трапеции

Трапеция, как известно из геометрии, это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две — нет.
Площадь трапеции вычисляется по формуле $S = (a+b)/2\Delta h$, иначе "полусумма оснований на высоту".
Криволинейная трапеция представлена на рисунке, одна из боковых сторон —- некоторая кривая.
Будем в качестве кривой брать график функции $f(x)$, $x \in [a,\ b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на "частичные" отрезки точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Проведем через эти точки прямые параллельно оси ординат, разобъем трапецию на n частей.
Каждую из этих частей можно грубо рассматривать как "нормальную" трапецию. Тогда площадь фигуры, ограниченной получившейся ломаной, будет равна

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta x_i,$$

Интегральная сумма

$f(x) \in$ Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ (будем считать, что f обладает этим свойством), то на каждом частичном отрезке найдется точка

$$x_i^* : f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$

Можно переписать площадь в виде

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i,$$

и интерпретировать как площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

Сумму, стоящую в правой части, называют интегральной суммой

Погрешность этого приближения можно оценить так.
На каждом частичном отрезке можно взять два прямоугольника. Один с высотой, равной максимальному значению ординаты. Второй — минимальному. Обозначим суммарную площадь "маленьких" прямоугольников s, а больших — S. Очевидно, $s \le S^* \le S$.
"Истинное" значение площади криволинейной трапеции S_{trap} также будет удовлетворять неравенству $s \le S_{trap} \le S$. Поэтому $|S^* - S_{trap}| \le S - s$. Улучшить приближение можно уменьшив $S - s$, что можно сделать увеличивая число точек разбиения так, чтобы $d = max\{\Delta x_i\} \to 0$.
Итак, площадь криволинейной трапеции можно рассматривать как предел специфического вида

$$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i.$$

Рис.: Caption above the figures.

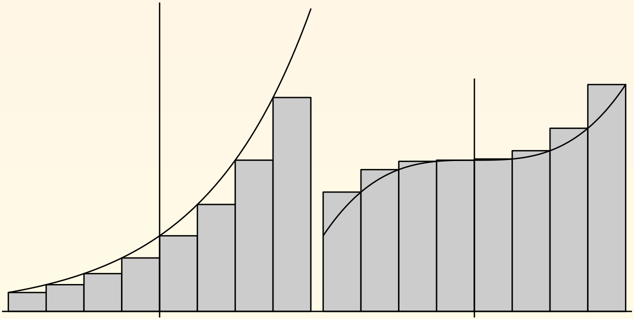


Рис.: Caption below the figures.

Путь при неравномерном движении

$$v(t),\ t \in [t_0,\ t_{fin}]\ \text{Найти} S$$

$$t_0 < t_2 < \cdots < t_n = t_{fin}.$$

$$\tau_i \in [t_{i-1},\ t_i] \Rightarrow \Delta S_i = v(\tau_i)\Delta t_i$$

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

Определенный интеграл

Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$ $\quad a < b$
Разбиение τ : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{n-1} < x_n = b$.

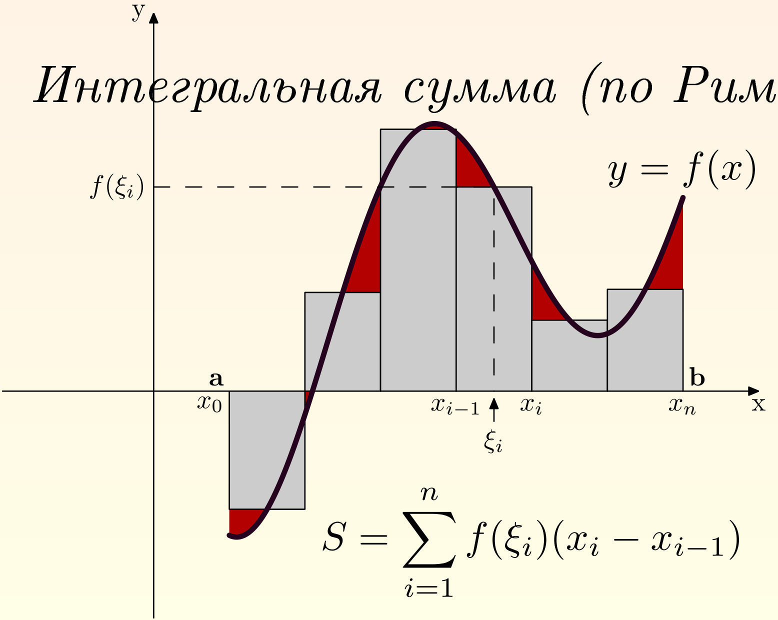
$$d = \max \Delta x_i \text{— диаметр разбиения;} \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Определение. Интегральная сумма (по Риману) $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$

Определение. Предел интегральной суммы при $d \to 0$ называют определенным интегралом (по Риману) и обозначают

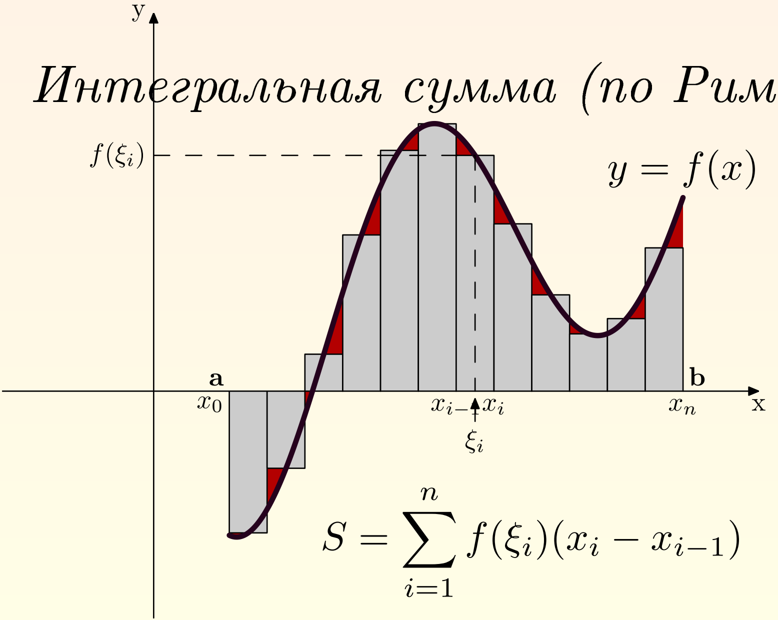
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

Интегральная сумма (по Риману)



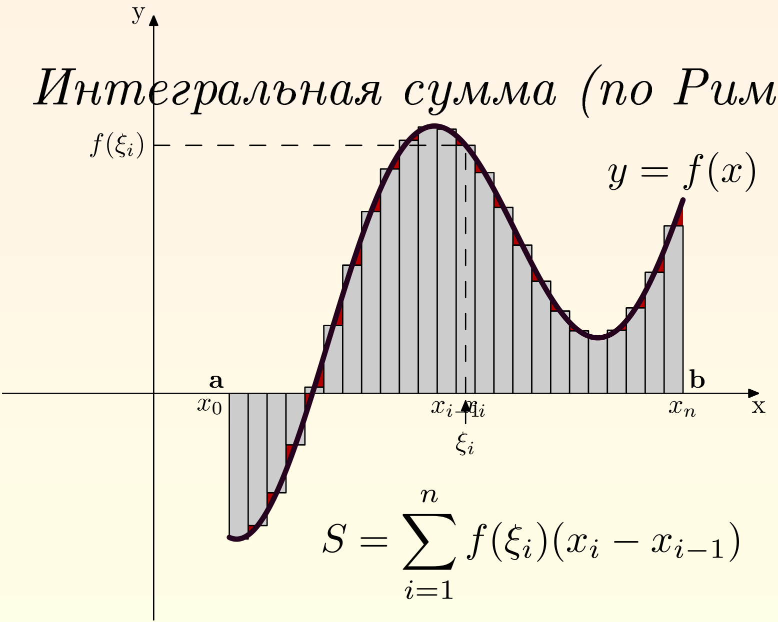
$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Интегральная сумма (по Риману)



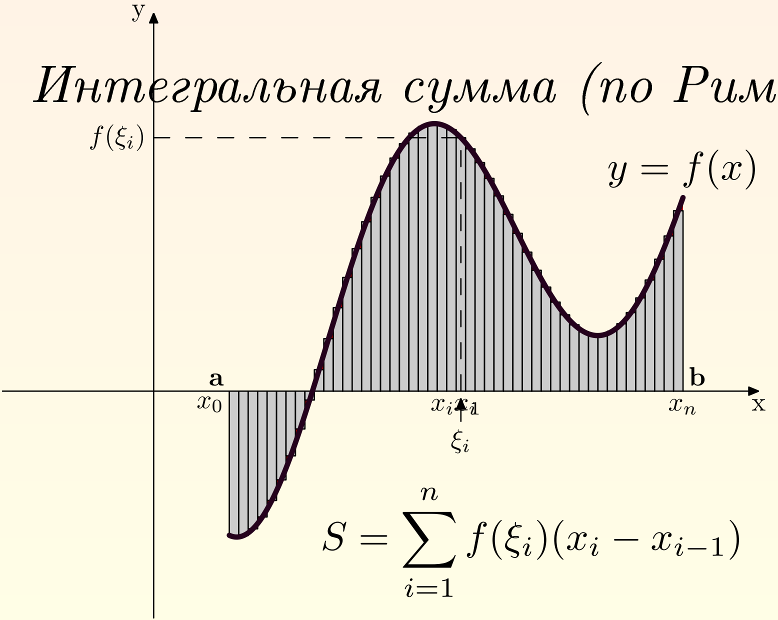
$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Интегральная сумма (по Риману)



$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Интегральная сумма (по Риману)



$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

x — переменная интегрирования; a — нижний предел интегрирования; b — верхний предел интегрирования; $f(x)\,\mathrm{d}x$ — подинтегральной выражение; $f(x)$ — подинтегральная функция.

Theorem

Необходимое условие интегрируемости:
Если функция интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$

Theorem

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

Еще один класс функций, интегрируемых на $[a, b]$— кусочно-непрерывные на $[a, b]$, или имеющие конечное число точек разрыва 1 рода.

Каждому свойству дадим некоторое наименование, оно будет кратко отражать те манипуляции, которые можно производить с символом $\int_a^b f(x)dx$

0. Смена пределов интегрирования Это даже не свойство, следующее

из определения, скорее это некоторое доопределение нашего обозначения ОИ.
Если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Также, пусть

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

1. Интеграл от единицы

$$\int_a^b dx = b - a$$

Докажем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Если

$$f(x) = 1, \quad \forall x \in [a,b], \quad \text{то } \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i = b - a$$

2. Вынесение постоянного множителя за знак ОИ

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

3. Интегрирование суммы

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

4. Разбиение отрезка интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Интегрирование неравенства

$$f(x) \geq \phi(x), \quad x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \phi(x)dx.$$

6. Оценка интеграла

$$m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

7. Теорема о среднем интегрального исчисления

$$f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \mu \in [a,b]: \quad f(\mu) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то на этом отрезке найдется по крайней мере одна точка μ такая, что справедливо

$$f(\mu) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство

Пусть m и M — наименьшее и наибольшее значения функции на [a,b]. В силу предыдущего свойства

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Непрерывная на отрезке функция принимает любое промежуточное значение, поэтому найдется

$$\mu \in [a,b] : f(\mu) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию f, интегрируемую на $[a, b]$. Значение интеграла

$$J(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

зависит от x, его называют интегралом с переменным верхним пределом.

Переменным может быть и нижний предел

$$\tilde{J}(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

И даже оба предела.

Свойства

Изучим основные свойства ОИ с переменным пределом. Кратко их можно охарактеризовать так: интегрирование "улучшает" свойства функции.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f(x) \in \Re_{[a,b]} \Rightarrow F(x) \in C_{[a,b]}$$

Theorem

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то F непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Докажем это. Построим приращение $\Delta F(x)$

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Интегрируемая функция с необходимостью ограничена

$$f(x) \in \Re_{[a,b]} \Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Оценим сверху приращение функции F

$$\Delta F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq M \Delta x.$$

Использована теорема об оценке ОИ. Отсюда следует $\lim \Delta F(x) = 0.$

2.О дифференцируемости
Если

$$f(x) \in C_{[a,b]},$$

то F дифференцируема на $[a, b]$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x_0) \quad x_0 \in [a, b], x_0 + \Delta x \in [a, b]$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

$$\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x); \quad \Phi(a) = 0,\ \Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C.$$