1.2. Определители 2 и 3 порядков (будет и общий случай)

Матрицей называют прямоугольную таблицу чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эти числа в совокупности рассматриваются как некий единый структурированный объект. Отдельные числа называют матричными элементами. В общем случае для записи матричного элемента используется обозначение $a_{i\,j}$, где переменная i обозначает номер строки матрицы, а переменная j – номер столбца. Естественно, при записи конкретной матрицы номеров не пишут. Это "адрес"каждого числа в матрице. Подробное изучение матриц оставим на "потом". Сейчас нас интересует только *определитель* квадратной (число строк и столбцов совпадает) матрицы.

Определитель второго порядка находится по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определитель третьего порядка можно вычислять по-разному. Первый метод называют "метод треугольников"или более наукообразно Саррюса.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1)$$

Примеры вычисления.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Перестановка (подстановка) это взаимнооднозначное отображение множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ в себя. Обычная запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

В результате перестановки упорядоченность по возрастанию нарушается. Появляются *инверсии*, т.е. больший номер стоит в записи левее меньшего. Мерой этого беспорядка является количество инверсий. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Инверсии: $(5,\ 1)$; $(5,\ 2)$; $(5,\ 4)$; $(5,\ 3)$; $(4,\ 3)$. Всего пять инверсий. *Четность перестановки* определяется четностью числа инверсий.

Определитель квадратной матрицы вычисляется через ее элементы по правилу

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (-1)^P a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}.$$

Переменные суммирования $(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_n)$ принимают значения, составляющие все возможные $n!$ перестановок чисел $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$, P - четность перестановки. Можно легко убедиться, что вышеприведенные формулы для $n = 2, 3$ соответствуют определению.

Свойства определителей.

- Транспонирование: $\det A = \det A^T$. Запишем определитель транспонированной матрицы. $\det A^T = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (-1)^P a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$. Каждое слагаемое содержит произведение элементов разных строк и столбцов, слагаемых столько же, что и в исходной сумме — $n!$. Осталось сравнить знаки соответствующих слагаемых. Переставим сомножители в $a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$ так, чтобы номера строк стояли в восходящем порядке. Этому соответствует подстановка $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Придется ликвидировать все инверсии в верхнем ряде, каждая транспозиция (перестановка пары) поменяет четность как верхнего ряда, так и нижнего. Поэтому четность результирующей перестановки номеров столбцов будет та же, что и у исходной — строк. Значит, и знак слагаемого будет тот же. Итак, оба определителя составлены из одних и тех же слагаемых с одинаковыми знаками, то есть равны. Можно предложить конкретный пример перестановки. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Имеем пять инверсий. Обратная перестановка: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Переставим парами числа из верхнего и нижнего рядов так, чтобы верхние числа стояли в естественном порядке. Получим $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Опять же пять инверсий!

- Перестановка рядов. Поскольку строки и столбцы можно произвольно менять, будем использовать термин *ряд*. Переставим в определителе строки с номерами l и $k > l$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сравним два слагаемых, одно из исходного определителя, а второе из полученного в результате перестановки строк.

$a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{li_l}\dots a_{ki_k}\dots a_{ni_n}$ и $a_{1i_1}a_{2i_2}\ \dots a_{ki_l}\dots a_{li_k}\dots a_{ni_n}$. В последовательности номеров строк появилась одна инверсия. Чтобы ее ликвидировать нужно переставить $2s+1$ пару чисел. Здесь s - количество номеров между l и k. Значит подстановка, определяющая знак этого слагаемого в исходном определителе, имеет противоположную четность. Это относится к каждому слагаемому, поэтому определитель сменит знак.

- Одинаковые ряды. Определитель с одинаковыми рядами равен нулю, что является очевидным следствием предыдущего свойства.

- Нулевой ряд Определитель с нулевым рядом равен нулю, поскольку в каждом слагаемом будет присутствовать элемент этого ряда.

- Умножение на число. Общий множитель элементов ряда можно вынести за знак определителя (и обратно). Совсем просто:

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} (-1)^P a_{1i_1}\lambda a_{2i_2}\dots a_{ni_n} =$$

$$= \lambda \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} (-1)^P a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \det A.$$

- Пропорциональные ряды. Если два ряда пропорциональны, то определитель равен нулю. Легко.

- Линейная комбинация рядов

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots (b_{1l}+c_{1l}) \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots (b_{2l}+c_{2l}) \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots (b_{nl}+c_{nl}) \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} (-1)^P a_{1i_1}a_{2i_2}\dots (b_{ki_k}+c_{ki_k})\dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} (-1)^P a_{1i_1}a_{2i_2}\dots b_{ki_k}\dots a_{ni_n} + \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} (-1)^P a_{1i_1}a_{2i_2}\dots c_{ki_k}\dots a_{ni_n} =$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_{1l} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_{2l} \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_{nl} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots c_{1l} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots c_{2l} \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots c_{nl} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

- Раскрытие определителя по строке или столбцу. Вычеркнем из определителя k-ю строку и j-й столбец. оставшиеся элементы составляют определитель $(n-1)$-го порядка M_{kj}, называемый *минором.* Величина $A_{kj} = (-1)^{k+j} M_{kj}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{kj}.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \cancel{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \cancel{a_{2j}} & \dots & \dots \\ \cancel{a_{k1}} & \cancel{a_{k2}} & \cancel{\dots} & a_{kj} & \dots & \cancel{a_{kn}} \\ \dots & \dots & \dots & \cancel{\dots} & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \cancel{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Справедлива формула

$$
\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}
$$

- Определитель произведения квадратных матриц. $\det(A \cdot B) = \det A \det B$. Можно предложить следующее доказательство. Запишем определитель произведения

$$
\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1} b_{s_1 1} & \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1} b_{s_1 2} & \dots & \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1} b_{s_1 n} \\ \sum\limits_{s_2=1}^{n} a_{2s_2} b_{s_2 1} & \sum\limits_{s_2=1}^{n} a_{2s_2} b_{s_2 2} & \dots & \sum\limits_{s_2=1}^{n} a_{2s_2} b_{s_2 n} \\ & & \dots & \\ \sum\limits_{s_n=1}^{n} a_{ns_n} b_{s_n 1} & \sum\limits_{s_n=1}^{n} a_{ns_n} b_{s_n 2} & \dots & \sum\limits_{s_n=1}^{n} a_{ns_n} b_{s_n n} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \sum_{s_1=1}^{n} \sum_{s_2=1}^{n} \cdots \sum_{s_n=1}^{n} a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n} \begin{vmatrix} b_{s_1 1} & b_{s_1 2} & \dots & b_{s_1 n} \\ b_{s_2 1} & b_{s_2 2} & \dots & b_{s_2 n} \\ & & \dots & \\ b_{s_n 1} & b_{s_n 2} & \dots & b_{s_n n} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \det B \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^P a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} = \det A \det B.
$$

Первое равенство имеет место в силу перечисленных выше свойств — о разложении определителя в сумму и о вынесении общего множителя ряда. Со вторым чуть сложнее. Обратим внимание на значения переменных суммирования, при совпадении значений хотя бы одной пары у определителя с элементами $b_{s_i j}$ будут равны две строки. Фактически суммирование идет по перестановкам $s_1, s_2, \dots, s_n$. В каждом определителе с элементами $b_{s_i j}$ будем переставлять строки при каждом наборе значений $s_1, s_2, \dots, s_n$ до тех пор, пока не ликвидируем все инверсии — вот и появится общий множитель $\det B$ и знак, учитывающий четность числа инверсий. С последним равенством все понятно.