УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой_______________
ВМ и УМФ
Мартышко П.С.

ПРОГРАММА
экзамена по курсу
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
2005/2006 учебный год

1. Матрицы, действия с ними*.

1.1. Матрица, частные виды матриц. Линейные операции на множестве матриц и их свойства.

1.2. Умножение матриц: определение и свойства (некоммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Единичная и скалярная матрицы. Транспонирование. Свойства операции.

1.3. Понятие обратной матрицы. Теорема существования. Свойства операции обращения: $\left(A^{-1}\right)^{-1}$, $(\lambda A)^{-1}$, $(A \cdot B)^{-1}$, $\left(A^{T}\right)^{-1}$.

2. Линейные векторные пространства (ЛВП)

2.1. Линейное пространство: определение, примеры. Аксиомы ЛВП и следствия из этих аксиом. Простейшие свойства линейных пространств. Примеры ЛВП.

2.2. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Свойства линейно зависимых (ЛЗС) и линейно независимых систем векторов (ЛНС). Необходимое условие линейной зависимости.

2.3. МЛНС. Базис линейного пространства. Равномощность базисов. Т. Штейница. Размерность пространства и ранг системы векторов. Координаты и их свойства. Примеры базисов в основных пространствах.

2.4. Координаты и их свойства. Изоморфизм ЛВП. Арифметические вектора.

2.5. Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе к новому базису. Матрица обратного перехода.

2.6. Линейное подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств, её наглядное истолкование. Прямая сумма подпространств. Задачи нахождения базиса и размерности линейной оболочки, суммы и пересечения подпространств.

3. Системы линейных уравнений (СЛУ)*

3.1. Система n линейных уравнений с n неизвестными. Матричная и векторная запись. Метод Гаусса решения СЛУ.

3.2. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентность умножению на матрицу. Нахождение обратной матрицы. Решение матричных уравнений.

3.3. Ранг системы векторов. Ранги эквивалентных систем. Независимость ранга системы векторов от элементарных преобразований. Ранг матрицы и его нахождение методом Гаусса.

3.4. ОЛСУ с точки зрения линейных пространств. Различные случаи. ФСР. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о структуре общего решения НЛСУ.

4. Линейная алгебра. Операторы

4.1. Оператор, действующий в линейном пространстве. Образ, прообраз элемента ЛВП. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене *базиса.*

4.2. Алгебра операторов. Действия над линейными операторами: равенство, сумма, произведение ЛО и числа; произведение операторов. Невырожденный оператор; критерий невырожденности. Обратный оператор.

4.3. Образ оператора. Свойства образа, базис образа, ранг оператора. Ядро линейного оператора как подпространство. Теорема о ранге и дефекте.

4.4. Инвариантные подпространства. Собственные векторы (СВ) и собственные значения (СЗ) линейного оператора. Характеристический многочлен, характеристическое уравнение. Инвариантность характеристического полинома. Два способа нахождения СВ.

1.5. Свойства СВ оператора: о СВ, принадлежащих разным СЗ, линейной комбинации СЗ, принадлежащих одному СЗ, о матрице линейного оператора, имеющего n л/н СЗ. Оператор простой структуры. Инварианты линейного оператора. Теорема о необходимом и достаточном условиях простой структуры оператора. Приведение матрицы оператора к диагональной форме.

5. Евклидово пространство

5.1. Аксиомы скалярного произведения. Евклидово и унитарное пространство. ОНБ. Свойства ортогональных систем векторов, ортогонализация по Граму-Шмидту. Ортогональная система векторов, её линейная независимость. Теорема о существовании ортогонального базиса.

5.2. Скалярное произведение, проекции вектора, координаты и длина вектора в ОНБ. Понятие ортогонального дополнения и его свойства. Теорема о разложении вектора. Построение ортогональной проекции вектора на подпространство. Разложение евклидова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.

5.3. Переход от ОНБ к ОНБ. Преобразование координат вектора при переходе от ОНБ к ОНБ. Ортогональная и унитарная матрицы. Комбинации поворотов и отражений. Правая и левая тройки векторов. Вид матрицы Грама в ОНБ. Теорема о взаимосвязи между линейной зависимостью системы векторов и обращением в ноль определителя матрицы Грама.

6. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

6.1. Матрица перехода от ОНБ к ОНБ. Оператор, сопряжённый данному. Связь между матрицами сопряжённых операторов. Свойства операции сопряжения. Сопряженные, самосопряженные, унитарные, ортогональные операторы. Самосопряжённый (эрмитов) оператор; симметричный оператор. Эрмитова матрица. Теорема о необходимом и достаточном условиях эрмитовости оператора в евклидовом пространстве. Свойства СВ и СЗ эрмитова оператора: вещественность СЗ; ортогональность СВ, соответствующих разным СЗ; теорема о существовании ОНБ из СВ эрмитова оператора. Диагонализация матрицы эрмитова оператора.

6.2. Линейная форма: определение, координатная и матричная запись, переход к новому базису. Билинейная форма (БФ), её матрица; координатная и матричная запись. Переход к новому базису. Квадратичная форма (КФ); её матричная и координатная запись. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Критерий Сильвестра знакоопределённости КФ.

6.3. Поверхности и линии второго порядка. Канонические формы уравнений. Исследование уравнений линий и поверхностей второго порядка.

7. Некоторые вопросы теории матриц

7.1. Треугольные матрицы, основные свойства. Простейшая треугольная матрица. Получение обратной матрицы, детерминанта. СЗ на диагонали. LU разложение - возможность и процедура выполнения.

7.2. Теорема Гамильтона-Кэли, многочлены от матриц, функции от матриц.

7.3. ЖНФ: жорданова клетка и "ящик", жорданова цепочка векторов. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения линейного оператора. Присоединенные векторы. Совокупность собственного вектора и присоединенных векторов, соответствующих данному собственному значению. Жорданова форма матрицы линейного оператора, жорданов базис. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой форме. свойства соответствующих п/п, структура клеток и ящиков, построение жорданова базиса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк: Линейная алгебра.
2. А.И. Мальцев: Основы линейной алгебры.
3. Р.И.Тышкевич, А.С.Феденко. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
4. А.Г. Курош: Курс высшей алгебры.
5. Э.Л. Блох, Л.И. Лошинский, В.Я. Турин: Основы линейной алгебры и некоторые её приложения.
6. И.В. Проскуряков: Сборник задач по линейной алгебре [**П**].
7. Сборник задач по математике для ВТУЗов, Т.1. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича [**Е**].

Примечание: Разделы, отмеченные звездочкой (*), входят в билеты на уровне практических заданий.

Программу составил доцент каф. ВМ и УМФ А.Л.Крохин