Найти базисы и размерности суммы и пересечения п/п L_1 и L_2.

$L_1 =< a_1,\, a_2,\, a_3 >, \quad a_1 = (1,\, 1,\, 1,\, 2),\, ,\, a_2 = (1,\, 2,\, 2,\, 3),\; a_3 = (1,\, 0,\, 0,\, 1).$

$L_2 \;=<\; b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4 \;>, \quad b_1 \;=\; (1,\, 1,\, 2,\, 2),\, ,\, b_2 \;=\; (1,\, -1,\, 3,\, 0),\; b_3 \;=\; (1,\, 2,\, 4,\, 3),\; b_4 = (0,\, 1,\, -3,\, 1).$

Первая половина задачи. Составляем сумму, как оболочку, натянутую на векторы $< a_1,\, a_2,\, a_3,\, b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4 >$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда — базис суммы $< a_1,\, a_2,\, b_1 >$. $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Заметим, что $a_3 = 2a_1 - a_2$, $b_2 = -a_1 - 2a_2 + 4b_1$, $b_3 = -2a_1 + a_2 + 2b_1$. Откуда получаем $4b_1 - b_2 = a - 1 + 2a_2$, $-b_3 + 2b_1 = 2a_1 - a_2$. Слева вектор из L_2, а справа вектор из L_1. Поэтому они принадлежат пересечению, а в силу линейной независимости являются его базисом. Последнюю задачу можно было решать и в лоб. Составить произвольные линейные комбинации векторов изL_1 и L_2 и приравнять их, тем самым, получив условие, определяющее элементы пересечения. Получаем систему $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$.(взяты вектора МЛНС) Решая систему, получаем искомые базисные вектора, результат тот же.