# 7 Метод Гаусса численного решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Основная идея метода. рассматриваются численные методы решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ — вещественная квадратная матрица порядка $n$, а $\mathbf{b}$ – заданный и $\mathbf{x}$ - искомый векторы. Будем предполагать, что определитель матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля. Тогда для каждого вектора $\mathbf{b}$ система (2) имеет единственное решение. Запишем систему (2) в развернутом виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Метод Гаусса решения системы (3) состоит в последовательном исключении неизвестных $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ из этой системы. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Поделив первое уравнение на $a_{11}$, получим

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \tag{4}$$

Рассмотрим теперь оставшиеся уравнения системы (3):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 2, 3, ..., n$$

Умножим (4) на $-a_{i1}$ и прибавим полученное уравнение к $i$-му уравнению системы (3) , $i = 2, ..., n$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{5}$$

Здесь обозначено $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, $b_i^{(1)} = b_i - \dfrac{b_1}{a_{11}} \cdot a_{i1}$. Матрица преобразованной системы (5), равносильной исходной, имеет вид

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ldots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Тем самым мы осуществили первый шаг метода Гаусса. Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из системы (5) совершенно аналогично можно исключить неизвестное $x_2$ и прийти к системе, эквивалентной (3) и имеющей матрицу следующей структуры:

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$ где крестиками обозначены ненулевые элементы.

Исключая таким же образом и остальные неизвестные $x_3$, $x_4, \dots,$ $x_n$, получаем "усеченную" систему уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{1n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(3)}x_n &= b_2^{(2)} \\ x_3 + \ldots + a_{1n-1}^{(3)}x_{n-1} + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\ \dots \\ x_{n-1} + a_{nn}^{(n-2)}x_n &= b_n^{(n-2)} \\ x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Матрица системы (7) содержит нули всюду ниже главной диагонали. Матрицы такого вида называются *верхними треугольными матрицами. Нижней треугольной* называется такая матрица, у которой равны нулю все элементы, расположенные выше главной диагонали.

Верхняя (а) и нижняя (б) треугольные матрицы: а) $\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \times \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \times & \times & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$

Получение системы (7) составляет *прямой ход метода Гаусса. Обратным ходом* последовательно, начиная с $x_n$, находятся неизвестные $x_{n-1}$, $x_{n-2}, \dots,$ $x_1$

Для реализации метода Гаусса нет необходимости переписывать сами уравнения. Достаточно работать с матрицей системы. Соответствующие преобразования матриц промежуточных систем называют *элементарными преобразованиями.*

Перечислим их: а) умножение элементов строки на число, не равное нулю; б)перестановка строк матрицы; в) поэлементное прибавление к строке соответствующих элементов другой строки, умноженных на число.

Заметим, что перестановка строк в нашем случае не проводилась. Необходимость в перестановке строк возникает, если на очередном шаге прямого хода метода Гаусса получаем $a_{jj} = 0$. Если в данной колонке отсутствуют (равны нулю) остальные элементы ниже главной диагонали, то данный шаг можно пропустить. Если же некоторый $a_{ij} \neq 0\,(i > j)$, то строки с номерами $i$ и $j$ переставляют.

## 7.1 Связь метода Гаусса с разложением матрицы на множители. LU разложение

В предыдущем параграфе было показано, что метод Гаусса преобразует исходную систему уравнений

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{8}$$

в эквивалентную систему

$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y}, \tag{9}$$

где $\mathbf{U}$ - верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

В данном параграфе мы выполним прямой ход метода Гаусса немного иначе. Во-первых, ограничимся матрицами $\mathbf{A}: \det \mathbf{A} \neq 0$ и не равными нулю угловыми минорами. Во-вторых, не будем выполнять деление элементов строк на диагональные элементы при элементарных преобразованиях. Т.е. на диагонали верхней треугольной матрицы $\mathbf{U}$ будут стоять призвольные, не равные нулю числа.

"Обнуление" первого столбца матрицы $\mathbf{A}$ можно произвести, умножая ее слева на матрицу $\mathbf{L}_1$:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Проверим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ясно, что первая строка останется неизменной. Вторая преобразуется так:

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{11} + a_{21} & -\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} + a_{22} & \dots & -\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{1n} + a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Третья строка:

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{11} + a_{31} & -\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{12} + a_{32} & \dots & -\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{1n} + a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Также и остальные строки. Матрица произведение совпадает с результатом выполнения элементарных преобразований по "обнулению" первого столбца.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

"Обнуление" второго столбца ниже главной диагонали производится умножением матрицы $\mathbf{A}_1$ слева на матрицу $\mathbf{L}_2$:

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Проделываем аналогичное преобразование до тех пор, пока очередная матрица-произведение не станет верхней треугольной.

Окончательный результат в виде матричного произведения такой

$$\underbrace{\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-2}\dots\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1}_{\text{обозначим } \mathbf{L}^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{U}. \tag{10}$$

Разрешим (10) относительно матрицы $\mathbf{A}$, умножив слева на $\mathbf{L}$.

### 7.1.1 Свойства треугольных матриц

Множество треугольных матриц одинаковой размерности(верхних или нижних)замкнуто относительно сложения и умножения матриц. Для сложения это очевидно. Покажем, что произведение двух треугольных матриц есть треугольная матрица.

Перемножим две верхние треугольные матрицы:

$$a_{ij} = b_{ij} = 0,\ i > j,\ \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^{k=j} a_{ik}b_{kj} \neq 0,\ i \leq j.$$

Полученное произведение — также верхняя треугольная матрица. Аналогичным свойством обладает и произведение нижних треугольных матриц.

Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

$$\det \mathbf{A} = \sum (-1)^P a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \dots a_{ni_n} \tag{11}$$

Сумма в (11) проводится по всем перестановкам индексов $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Для треугольной матрицы только начальная перестановка может давать ненулевой вклад в сумму. Это произведение диагональных элементов. Достаточно переставить хотя бы пару индексов и появится нулевой сомножитель, поэтому все остальные слагаемые равны нулю. $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1} a_{ii}$.

Назовем матрицу $\mathbf{L}_j$ *элементарной нижней треугольной матрицей*, если она имеет следующий вид

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+1j} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nj} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ненулевые элементы могут находиться лишь в одном $j$-ом столбце ниже главной диагонали. На главной же диагонали стоят единички. Заметим, что именно такие матрицы соответствуют элементарным преобразованиям по "обнулению" $j$-го столбца в прямом ходе метода Гаусса.

Найдем обратную матрицу $\mathbf{L}_j^{-1}$. Нетрудно убедиться что она получается заменой знака элементов $l_{ij}$. Действительно, перемножим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+1j} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nj} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -l_{j+1j} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -l_{j+2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -l_{nj} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая строки первой матрицы на любой столбец второй матрицы кроме $j$-го, будем получать элементы единичной матрицы. Рассмотрим подробнее умножение строк с номерами $j + k \geq j$ на $j$-й столбец второй матрицы.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccccccccc} & & & & & & \downarrow^{j+k} & & & \end{array} \\ \text{строка j+k} & \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & l_{j+kj} & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \\ \text{столбец j} & \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1 & -l_{j+1j} & \dots & -l_{j+kj} & -l_{j+k+1j} & \dots & -l_{nj}\end{pmatrix} \end{array}$$

Переножаем соответствующие элементы, получим $l_{j+kj} - l_{j+kj} = 0$. Итак, произведение двух матриц равно единичной, значит они взаимно обратные.

А теперь рассмотрим произведение элементарных треугольных матриц с разными номерами ненулевых столбцов.

$$\mathbf{L}_j \cdot \mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+1j} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nj} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{k+1k} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{k+2k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nk} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат перемножения таких матриц удобнее анализировать, если представить каждую матрицу в виде суммы единичной и "столбчатой".

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{E} + \mathbf{L}_j^{'} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+1j} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{j+2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nj} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножим две таких суммы.

$$\mathbf{L}_j + \mathbf{L}_k = (\mathbf{E} + \mathbf{L}_j^{'})(\mathbf{E} + \mathbf{L}_k^{'}) = \mathbf{E} + \mathbf{L}_j^{'} + \mathbf{L}_k^{'} + \mathbf{L}_j^{'}\mathbf{L}_k^{'}.$$

Подробно рассмотрим только перемножение "столбчатых" матриц. Результат существенно зависит от того, как в произведении стоят матрицы. Если левая имеет более "длинный" столбик(или равный), то произведение – нулевая матрица. Если наоборот, то может оказаться и ненулевой элемент.

Пусть $j < k$, $j$-ый столбик длиннее, чем $k$-ый, главная диагональ идет слева направо и сверху вниз . Тогда строки первой матрицы $\mathbf{L}_j^{'}$ с номерами $\leq j$ — нулевые. Соответственно и у произведения строки с этими номерами будут нулевыми. Возьмем строку с номером $j + m$, $m > 0$. Все эти строки содержат ненулевой элемент только в $j$-ом столбце. При умножении на $k$-ый столбец матрицы $\mathbf{L}_k^{'}$ соответствие между матричными элементами таково, что получится ноль. Ведь $k > j$, а ненулевые элементы будут только ниже главной диагонали, т.е. $l_{k+1k}$.

| | | | | $\downarrow$ j | | | $\downarrow$ k | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| строка j+m | 0 | 0 | ... | $\boxtimes$ | 0 | 0 | 0 | | | | |
| столбец k | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | 0 | $\boxtimes$ | ... | $\boxtimes$ | $\boxtimes$ |

Итак, произведение двух элементарных треугольных матриц $\mathbf{L}_j + \mathbf{L}_k$, при условии $j \leq k$, будет треугольной матрицей с единичками на главной диагонали и двумя столбцами, "взятыми" у элементарных матриц.

Если же матрицы в призведении переставить, то может оказаться, что в произведении элемент $a_{jk} \neq 0$.

$$\begin{array}{ll} & \qquad\qquad\quad\ \downarrow^{k} \\ \text{столбец k} & \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 0 & \boxtimes & \dots & \boxtimes & \boxtimes & \dots & \boxtimes\end{pmatrix} \\ \text{строка j+m} & \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \boxtimes & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Вернемся к LU разложению. Рассмотрим квадратную матрицу $\mathbf{A}$. Пусть определитель $\mathbf{A}$ и все ее главные миноры будут отличны от нуля. В этом случае справедливо

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

Здесь матрица $\mathbf{L}$ — нижняя треугольная, на главной диагонали стоят единички, а ненулевые элементы только ниже главной диагонали. Матрица $\mathbf{B}$ — верхняя треугольная.

Выше было показано, что элементарные преобразования матрицы $\mathbf{A}$, эквивалентные прямому ходу метода Гаусса, можно заменить последовательным умножением на матрицы $\mathbf{L}_j(10)$. Причем длина столбцов в $\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-2}\dots\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}^{-1}$ растет слева направо, поскольку сначала обнуляяли первый столбец, затем — второй и т.д.

Разрешим (10) относительно матрицы $\mathbf{A}$, умножив слева на $\mathbf{L}$. Нахождение обратной матрицы в данном случае очень просто. Заметим, что

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-2}\dots\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\dots\mathbf{L}_{n-2}^{-1}\mathbf{L}_{n-1}^{-1}.$$

Обратные матрицы находятся простой сменой знака, кроме того, в новом произведении длина столбцов слева направо уменьшается. Итак, матрица $\mathbf{L}$ — нижняя треугольная, на диагонали стоят единички, а столбцы состоят из коэффициентов прямого хода метода Гаусса с переставленными знаками.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \frac{a_{n3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

После выполнения LU разложения исходной матрицы (8), решение системы сводится к последовательному решению двух систем

$$\mathbf{LB} = \mathbf{Y},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$