

0.0.1 Числовые ряды

Исследовать на сходимость ряды

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n-6}{10n+3}.$$

Сформулировать использованные признаки.

0.0.2 Степенные ряды

- Выразить в форме ряда $\int_0^x t^4 \cos t^3 dt$ и указать область сходимости полученного ряда.
- Найти интервал сходимости степенного ряда

$$x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots$$

- Используя разложение в ряд Маклорена, решить дифференциальное уравнение $y'' = -ye^{x^2} + x^2$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$. (Выписать первые 4 ненулевых члена ряда). Построить график решения.

0.0.3 ФКП, значения

Вычислить значение ФКП $(-1-i)^{4i}$

Найти и изобразить на чертеже множество точек комплексной плоскости

$$|\sin(\pi + i \ln(2 + \sqrt{5}))| > |z - i|$$

0.0.4 ФКП Производная, геометрический смысл

Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении ФКП $w(z) = z^3$ в точках $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = 2 + 3i$, $z_4 = 5$. Дать геометрическую интерпретацию полученного результата.

0.0.5 Аналитическая ФКП, признаки, свойства

Построить такую аналитическую функцию f , чтобы

$$\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(u(x, y) + iv(x, y)) = u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1$$

0.0.6 Интегрирование

Вычислить, не прибегая к теории вычетов, $\int_{x^2 + \frac{y^2}{9} = 1} \frac{dz}{z^2(z-2)}$.

Вычислить интеграл

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz, \quad \gamma: x^2 + y^2 + 6y = 0.$$

0.0.7 Ряды Тейлора и Лорана ФКП

Получить все возможные разложения по степеням $(z-3)$ для функции $\cos\left(\frac{z+5}{z-3}\right)$. Указать область сходимости.

0.0.8 Особые точки, вычеты

Для функции f указать все ОТ и их характер.

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{(z - \frac{\pi}{3})(z - \frac{\pi}{2})^2}.$$

Для функции f найти вычеты во всех ОТ.

$$\frac{1}{\sin z - \frac{1}{2}}$$

0.0.9 Определенные интегралы и ФКП

Вычислить, используя вычеты

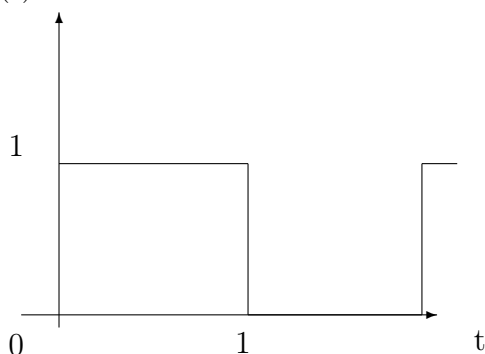
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \sin \varphi + \cos \varphi}$$

Вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx.$$

0.0.10 Операционное исчисление

f(t)



Найти изображение по Лапласу периодической функции f , заданной графически

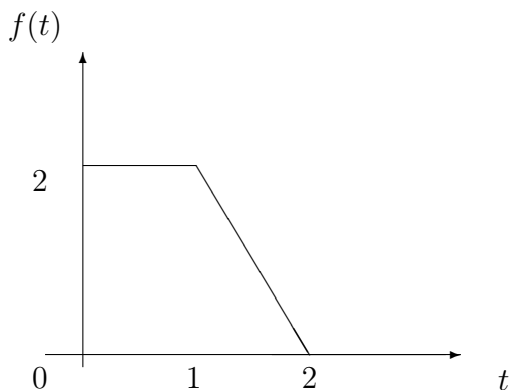
*Найти оригиналы с помощью свойств ПЛ

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}$$

0.0.11 Решение ДУ и СДУ

Решить ДУ операционным методом

$$x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2.$$



Решить ДУ операционным методом $x'' - 2x' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Функция односторонне-периодическая с периодом $2 (t > 0)$.

0.0.12 Числовые ряды

Исследовать на сходимость ряды

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n - 6}{10n + 3}.$$

Сформулировать использованные признаки.

0.0.13 Тригонометрические ряды Фурье

- а) Функцию $f(x) = 3 - x$, определённую на $[0; 2]$, продолжить нечётным образом, построить график новой функции $\tilde{f}(x)$;
- б) Определить $T = 2l$. Записать для $\tilde{f}(x)$ формулы для коэффициентов ТРФ;
- в) вычислить a_0, a_1, b_1 и построить график суммы S_1 (на том же рисунке, что и график исходной функции);
- г) вычислить a_2, b_2 и построить график суммы S_2 ;
- д) Разложить в ряд Фурье, т. е. записать полный ТРФ с найденными выражениями для коэффициентов a_n, b_n . Обосновать характер сходимости полученного ряда.
- е) Записать ТРФ в комплексной форме. Найти АЧХ и ФЧХ.

Example 8

Let $f(x) = \text{sign}(x)$.

$$S_{2N-1}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)\pi x)$$

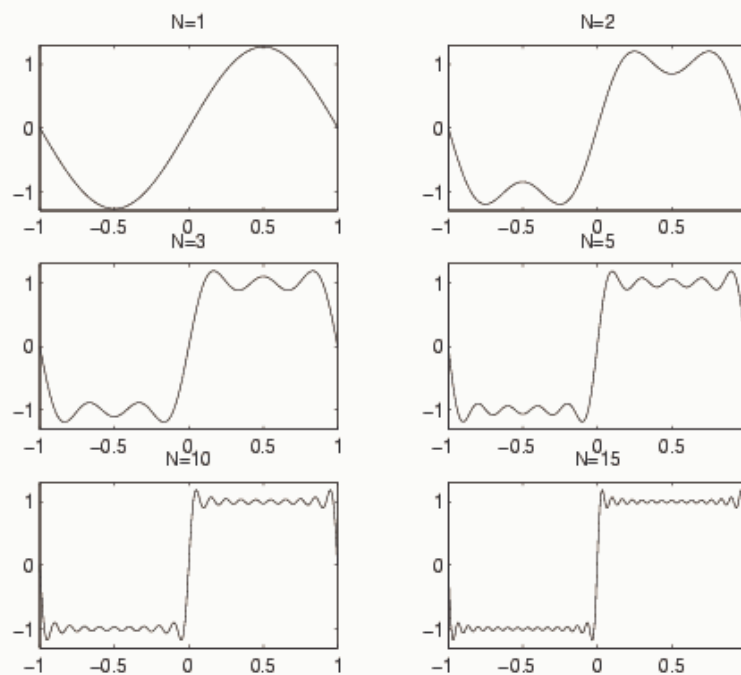


Figure 3

Найти фурье-образ свертки функций

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 2\pi], \\ 0, & t \notin [0, 2\pi]; \end{cases}$$

Сделать это непосредственно (т. е. по формуле прямого ПФ) и с помощью свойств ПФ.