ВАРИАНТ №10

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - t^2, \\ \dot{y} = \frac{8txy}{(t^2-y^2)(2t^2+2t+1)}, \\ x(0) = 0,25; \;\; y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y + e^{4t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + 2y = 10 + e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Показать, что функции $\psi_1(x,y,z) = \frac{y}{x}$ и $\psi_2(x,y,z) = z - x - y$ определяют линейно независимые первые интегралы системы

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{x+y}{x}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Записать общий интеграл системы дифференциальных уравнений.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее

решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = \frac{3y}{x+3y}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (17/18, -19/18)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + \operatorname{th} t, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;1)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = -\frac{7}{4}x - \operatorname{sh} 3y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -3y + 5x(x+2)(x-1). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2x^3, \\ \dot{y} = 2x - y - y^5. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$