ВАРИАНТ №11

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^3dy = 2yxdt + t^5 \ln t\, dt, \\ t^2\dot{x}^2 + 4x^2 = 4tx\dot{x}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y + te^{4t}, \\ \dot{y} = x - 4y + 2e^{4t}. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y'''+y''-2y = \sin 3t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Проверить, что вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t(2\cos t - \sin t) \\ e^t(3\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

является общим решением системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z+3} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x+3}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \dot{y} = \frac{1}{x-y}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (2;1)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot x = y + \operatorname{tg} t, \\ \dot y = -x. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2+By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot x = -5x - y, \\ \dot y = x - y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot x = \ln(1+x) + \sin 4y, \\ \dot y = \sqrt{1+4x} - 1 + 3y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot x = y, \\ \dot y = -2y - 4x(x-1)(x-2). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot x = x + yx^2 - y^3, \\ \dot y = -y + x^3 - xy^2. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$