ВАРИАНТ №12

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2\dot{x} + (1-2t)x = ty\exp(\frac{2}{t} + t - 1), \\ t\dot{y} = y\ln\frac{y}{t}, \\ x(1) = -e^2; \;\; y(1) = 1. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 2t, \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 3y'' - y' - 3y = 1 - t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Показать, что система функций

$$\begin{cases} y_1(x) = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x), \\ y_2(x) = e^x(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x) \end{cases}$$

составляет общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + y_2. \end{cases}$$

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{2x - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z - x}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{y}, \\ \dot{y} = \frac{1}{x}, \\ x(0) = 1; \;\; y(0) = 2. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1; -1)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2+By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x + \sqrt{1+y} - 1, \\ \dot{y} = \sqrt{1+x} - \cos x + y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y - x(x^2-1). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^5. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$