ВАРИАНТ №13

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot y = \frac{4xy}{t^4} + \operatorname{tg}\frac{y}{t}, \\ t dx = (t^3 - x)dt, \\ x(1) = 0,25; \;\; y(1) = \pi/2. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot x = -x + 3y, \\ \dot y = 3x - y + 3\sin 2t. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' - y' + y = e^t + e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Построить фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot x = -y, \\ \dot y = x, \end{cases}$$

нормированную в точке $t = 0$.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{x - 4z} = \frac{dz}{4y - 2x}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot x = 5(3 - x - y), \\ \dot y = 7(3 - x - y), \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (2;0)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot x = -2x + 3(1 + t)e^t, \\ \dot y = x + y - e^t. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + e^{4y} - 1, \\ \dot{y} = 2x - 3\operatorname{sh} y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4y - 4x(x^2 - 4). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + yx - 2y^2, \\ \dot{y} = -y + x + x^2 - 2xy. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$