ВАРИАНТ №1

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 - 6x + 2t\dot{x} = 0, \\ t^3\dot{y} = \frac{t^4}{y} + 2yx, \\ x(-1) = 0,5; \quad y(-1) = 0. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 3e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' - 3y = 1 + t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Показать, что система функций

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ y_2 = e^{2x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x) \end{cases}$$

составляет общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{2x+3y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{2x+3y}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - \operatorname{ctg} t, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + x\sin y, \\ \dot{y} = x + 4y + 1 - \cos y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2y - 2x(x+3)(x-1). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x - 2y^3. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$