ВАРИАНТ №2

<u>Основные понятия.</u>

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2\dot{x}^2 + 3x^2 = 4tx\dot{x}, \\ t\dot{y} - y = xt^2e^t, \\ x(1) = 1; \;\; y(1) = -44e. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' + 2y' = 1 + e^{-t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Методом изоклин построить приближённо 10 фазовых траекторий системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Найти аналитически общее решение системы, выделить траекторию, проходящую через точку $(1;1)$ и изобразить её. Сравнить результаты.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x+y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x+y}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (-1, -1)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = -2x - 2y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = -x - 3y + 4x^3. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4y - 2\sin x + 1. \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + x^3 + 4x^2y^2, \\ \dot{y} = 3x + y^3 - 6x^3y. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$