ВАРИАНТ №3

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2+t^2}, \\ \dot{y} + \frac{1-2t}{t^2}y = \frac{4xe^{2/t}}{t^2-4}, \\ x(2) = 0; \quad y(2) = -4e. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 6y, \\ \dot{y} = x + 4y + \cos t. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = \sin t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Показать, что функции $\psi_1(x,y,z) = \sin x - \sin y$ и $\psi_2(x,y,z) = \sin x - z$ определяют линейно независимые первые интегралы системы

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \cos x, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\cos y}. \end{cases}$$

Записать общий интеграл системы дифференциальных уравнений.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{y(z-1)} = \frac{dy}{x(z-1)} = \frac{dz}{-xy}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy, \\ \dot{y} = xy + y^2, \\ x(1) = 1, y(1) = 2. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1,0)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^t \sin e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t \sin e^t. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 8\sin y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3 + x^5. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y - 2x(x^2 - 1). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - x^3, \\ \dot{y} = -2x - y^5. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$