ВАРИАНТ №4

<u>Основные понятия.</u>

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2\dot{x}^2 + 2x^2 = 3tx\dot{x}, \\ t\dot{y} = y + te^t x, \\ x(1) = 1; \;\; y(1) = -2e. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 8y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + 5y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 3+t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Проверить, что вектор-функция

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2x \\ 0,4\sin 2x + 0,2\cos 2x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2x \\ 0,2\sin 2x - 0,4\cos 2x \end{pmatrix}$$

является общим решением системы

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее

решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x}e^t = \frac{1}{y}, \\ \dot{y}e^t = \frac{1}{x}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1,1)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + 2,5e^{3t}, \\ \dot{y} = 2x - y + e^{-3t}. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (-1;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{1+x} - 2e^{y}, \\ \dot{y} = \cos x - 2y - 1. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2y + 3x(x-1)(x+2). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy - y^2, \\ \dot{y} = -2y + 2x^2 - xy. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$