ВАРИАНТ №5

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x\,dt = t\,dx + t\,dt, \\ \frac{xyt^{y-1}}{t(1-\ln t)}dt + t^y \ln t\,dy = 0, \\ x(e) = 0; \;\; y(e) = 1. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 2e^t, \\ \dot{y} = x + 3y + e^t. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y'''-3y''+4y'-2y = 2-t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Используя определение общего решения системы дифференциальных уравнений в нормальной форме, показать, что система функций

$$y_1 = e^{-x}(c_1 + c_2 x) \quad y_2 = (c_1 + 0,5c_2 + c_2 x)e^{-x}$$

является общим решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2. \end{cases}$$

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее

решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3y}{2x-y}, \\ \dot{y} = \frac{6x}{2x-y}, \\ x(0) = 2, \; y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -3\cos 3t \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0,0)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 4t^2 e^{t^2}, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (-1; 0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + x^2, \\ \dot{y} = -2x + 2y - \sin y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4y - 5x(x^2 - 4). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + xy + y^2, \\ \dot{y} = -y + x^2 + xy. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$