ВАРИАНТ №6

<u>Основные понятия.</u>

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 + t^2}, \\ \frac{\dot{y}t}{t^2+y^2} = \frac{y^2}{t^2+y^2} - \frac{2x}{t^2+1}, \\ x(1) = 0; \;\; y(1) = 0. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + t, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + 9y' - 9y = 1 - e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Показать, что функции $\psi_1(x, y, t) = x + y - t$ и $\psi_2(x, y, t) = (x + y)(x - t)$ определяют первые интегралы системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y+t}{x+y}, \\ \dot{y} = \frac{x-t}{x+y}. \end{cases}$$

Являются ли они линейно независимыми первыми интегралами системы?

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее

решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{(x-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = 4xy, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1, 0)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + 4\sin t, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1; -1)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 + e^x, \\ \dot{y} = -x + \sin 2y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -3y - x(x+1)(x-2). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + x^3 + 2xy^2, \\ \dot{y} = -3x + y^3 - 3x^2y. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$