ВАРИАНТ №7

<u>Основные понятия.</u>

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t(\dot{y}-y)=(1+t^2)e^t, \\ x^2+(1-x)\dot{x}=0, \\ x(1)=1; \;\; y(1)=e. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x}=3x+y-\sin 2t, \\ \dot{y}=x+3y. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y'''-y''-9y'+9y=1-e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Показать, что вектор-функции $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ являются линейно независимыми на $(-\infty,\infty)$. Построить систему дифференциальных уравнений, для которой они образуют фундаментальную систему решений.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x}=z(x+z), \\ \dot{y}=-y(y+z), \\ \dot{z}=0, \\ x(0)=y(0)=z(0)=1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}}=\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{\mathbf{x}}+\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0)=(2,2)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}}=A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}} = A\overrightarrow{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\overrightarrow{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\sqrt{1+x} - 3e^y, \\ \dot{y} = -2\sin x + 0,5y. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2y + 4x(x^2 - 9). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + yx + y^2 - yx^2, \\ \dot{y} = -y + x^2 + yx - x^3. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}} = A\overrightarrow{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$