ВАРИАНТ №8

<u>Основные понятия.</u>

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x(1+\ln\frac{x}{t}), \\ \frac{t+y\dot{y}}{\sqrt{t^2+y^2}} = \frac{xy}{t^3}e^{t/2} - \frac{y}{t^2}, \\ x(1) = 1/\sqrt{e};\ \ y(1) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 9y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 4e^t. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Найти и построить траекторию и фазовую траекторию системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

при $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее

решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z-1} = \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dz}{x-1}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{y} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{z} = x - y + 1, \\ x(1) = y(1) = 1;\ \ z(1) = 2. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1,1)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + \frac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2 + By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - 1, \\ \dot{y} = y - \sin x. \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствующих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y - x(x-2)(x-3). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 - 3y^3, \\ \dot{y} = 2x + y^3 + 6xy^2. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$