Распределение **Рэлея.**

Это распределение встречается в нескольких практических ситуациях. В частности, ниже будет показано, что плотности вероятностей амплитудных значений (т. е. огибающих) узкополосных случайных напряжения или тока, распределенных по нормальному закону, подчиняются рэлеевскому закону. Первоначально эту плотность вероятностей ввел лорд Рэлей в 1880 г. при рассмотрении огибающей суммы ряда гармонических колебаний разной частоты Она также встречается

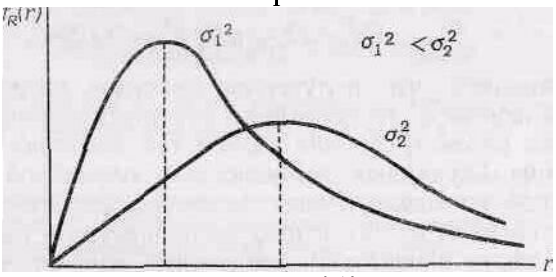

Рис. 2.13. Рэлеевская плотность распределения вероятностей.

при пристрелке пушек, ракет и другого огнестрельного и метательного оружия, если разбросы (отклонения от цели) в каждом из двух взаимно перпендикулярных направлений независимы и распределены по нормальному закону. Таким образом, если начало прямоугольной системы координат считать целью, а разброс по осям обозначить через X и Y, то промах будет выглядеть как $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$. Если X и Y — независимые гауссовские случайные величины (нормальное распределение) с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями σ^2, то плотность вероятностей для R будет записываться в виде

$$f_R(r) = \begin{cases} (r/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2) & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \qquad (2.31)$$

Это и есть *рэлеевская плотность* распределения вероятностей, график которой для различных значений дисперсии σ^2 показан на рис. 2.13. Обратите внимание на то, что максимум этой функции соответствует стандартному отклонению, и что она несимметрична относительно этого значения.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Рэлея, легко определяется и равно

$$\overline{R} = \int_0^\infty r f_R(r)\,dr = \int_0^\infty (r^2/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2)\,dr = (\pi/2)^{1/2}\sigma,$$

а средний квадрат имеет вид

$$\overline{R^2} = \int_0^\infty r^2 f_R(r)\,dr = \int_0^\infty (r^3/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2)\,dr = 2\sigma^2.$$

При этом дисперсия случайной величины R равна

$$\sigma_R^2 = \overline{R^2} - (\overline{R})^2 = (2 - \pi/2)\,\sigma^2 = 0{,}429\sigma^2.$$

Обратите внимание, что полученное значение дисперсии отличается от дисперсии σ^2 гауссовских случайных величин, из которых получена рассматриваемая рэлеевская величина. В отличие от гауссовских случайных величин, для случайной величины, распределенной по закону Рэлея, и математическое ожидание и дисперсия зависят от одного и того же параметра σ^2, в результате чего они не могут изменяться независимо друг от друга.

Функция распределения вероятностей для рэлеевской величины находится непосредственно из соответствующей плотности вероятностей, которая легко интегрируется.

Таким образом,

$$F_R(r) = \begin{cases} \int\limits_0^r (u/\sigma^2) \exp(-u^2/2\sigma^2)\, du = 1 - \exp(-r^2/2\sigma^2), & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Чтобы проиллюстрировать использование распределения Рэлея, рассмотрим стрельбу из лука по мишени диаметром 60,8 см, с центром которой совпадает началом прямоугольной системы координат. Расстояния от него до точек попадания стрел — это случайные величины, имеющие X и Y ортогональные составляющие (случайный вектор). Пусть средние квадратические отклонения разброса по абсциссе и ординате одинаковы и равны 7,6 см, т. е., $\sigma_x = \sigma_y = 7{,}6$ см. Если принять, что случайные величины распределены по нормальному закону, то расстояние от точки попадания стрелы до центра мишени (отклонение разброса) будет случайной величиной с распределением Рэлея, плотность вероятности для которой записывается в виде

$$f_R(r) = (7{,}6)^{-2}\, r \exp[-r^2/2\cdot 7{,}6^2], \quad r \geqslant 0.$$

Используя полученные выше результаты найдем, что математическое ожидание разброса есть $R = (\pi/2)^{1/2}\, 7,6 = 9,5$ см, а стандартное отклонение $\sigma_R = (0,429\cdot 7{,}6)^{1/2} = 5$ см. При помощи функции распределения вероятностей найдем вероятность непопадания в мишень:

$$\begin{aligned} \text{P (непопадание в мишень)} &= 1 - F_R(30{,}4) = \\ &= 1 - [1 - \exp(-30{,}4^2/2\cdot 7{,}6^2)] = e^{-8} = 3{,}35\cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Аналогично, приняв диаметр яблочка мишени равным 5, 08 см, найдем, что вероятность попадания в него будет

$$\begin{aligned} \text{P (попадание в яблочко)} &= F_R(2{,}54) = \\ &= 1 - \exp[2{,}54^2/2\cdot 7{,}6^2] = 0{,}0540. \end{aligned}$$

Очевидно, лучник из этого примера не слишком опытен, хотя почти все его стрелы и попадают в мишень!

Упражнение 2. 6. 2. Стрелок-любитель стреляет из пистолета в мишень диаметром 20 см. Известно, что вероятность непопадания в мишень при одном выстреле составляет 0, 01. Определите математическое ожидание для разброса (относительно центра мишени) по всей серии выстрелов.

Ответ: 4, 2 см.