

## Задачи для экзаменационных билетов

### Вероятность

2. В шкафу находится 10 пар ботинок различных фасонов. Из них случайным образом выбирается 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок нет парных.

3. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом ящике 10 белых и 5 красных шаров. Из первого переложили шар во второй, а затем из второго обратно. Какова вероятность того, что состав в первой урне не изменился.

3. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар ?

3. Дед Мороз положил Вам под елочку два билета Спортлото "6 из 49", причем один заполнен полностью: (1,12,23,30,31,48). Второй-же заполнен не до конца: (1,12,23,30,31, ). Какое число Вы зачеркнете дополнительно и как оцените свои шансы на выигрыш?

2. Найти вероятность того, что в группе из 25 студентов первокурсников хотя бы у двоих был одинаковый день рождения ( т. е. дата и месяц одни и те же).

2. От трех поставщиков получены крупные партии одинаковых микросхем, в количествах 1000, 2000 и 3000 соответственно . Вероятности отказов различные: 0.1 для поставщика А, 0,05 для.Б и 0.08 для В. Найти вероятность отказа произвольной микросхемы, а также вероятность того, что отказавшая - от А.

2. Вероятность попадания в цель 0.8 . Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы наивероятнейшее число попаданий было 20 ? Какова будет эта вероятность? Найти  $\sigma$  числа попаданий в этом случае .

2. Десять членов правления межнациональной компании размещают в VIP-гостинице, где есть два коттеджа с 3-я аппаратами и один — с 4-я. Сколько существует способов их размещения? Какова вероятность того, что Иванов и Джао-Ли-Цзы попадут в один коттедж, если они входят в число этих десяти?

2. Какой толщины должна быть монета, чтобы вероятность падения "на ребро" была равна  $1/3$  ?

2. Монета подбрасывается 95 раз. Найти вероятность того, что 80 раз выпадет герб; герб выпадет от 40 до 60 раз. Какое число выпадений герба наиболее вероятно и почему ?

3. Из коробки домино вынута кость - не дубль. Какова вероятность того, что следующая кость может быть приставлена к первой?

2. Вы - чемпион мира по боксу, предстоит встреча с равным по силе соперником. Напрягая остатки интеллекта, ответьте, что более вероятно: выиграть у него 4 раза из 7 или 5 раз из 9 ? Это нужно знать для заключения контракта.

2. К открытию библиотеки собралось 12 студентов, среди которых Иванов и Петрова. Поскольку люди они культурные, то по мере прихода образовали очередь. Какова вероятность того, что между Ивановым и Петровой окажется ровно 5 человек.

2. На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой многократно бросалась монета 100 рублей ("дореформенная"). Оказалось, что в 40% случаев монета не пересекала ни одной стороны квадрата. Оценить размер сетки.

2. До института студент может добраться на автобусе, который ходит с 20 минутным интервалом, или на троллейбусе, который ходит с 10 минутным интервалом. Какова вероятность того, что время ожидания не превысит пяти минут?

## Случайные величины и векторы

### Дискретные СВ

В течении некоторого промежутка времени амеба может погибнуть с вероятностью  $1/4$ , выжить с вероятностью  $1/4$  и разделиться на две с вероятностью  $1/2$ . Записать закон распределения СВ: "число амеб по истечению двух указанных промежутков времени".

3. Построить ряд распределения для СВ  $\eta$ , если  $\eta = 1 + \xi^2$  и

$\xi$	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.05	0.25	0.4	0.2

2. Задана дискретная СВ с законом распределения:

$\xi$	-2	-1	0	1	2
$P_i$	0.1	0.05	0.25	0.4	0.2

Найти ряд распределения СВ  $\zeta = \xi^2$  и ее функцию распределения.

2. Вероятность рождения мальчика 0.51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных мальчиков от 45 до 65; среди 1000 от 450 до 650. Сравнить полученные результаты и попытаться объяснить.

### Непрерывные СВ

3. Непрерывное случайное напряжение, принимающее значения от -10 В до +10 В, необходимо оцифровать в 8-битовое двоичное число. Определить с к о ошибки такого преобразования.

2. Случайная величина  $\xi$  имеет показательное распределение. Найти функцию распределения и плотность вероятности СВ  $\eta = e^{-\xi}$ .

2. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти с к о, если 5% коробок имеют массу меньше 1,00 кг.

2. СВ  $\xi$  распределена равномерно на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Найти закон распределения СВ  $\eta = \sin \xi$ . Сделать рисунок.

2. СВ  $\xi$  распределена по нормальному закону, причем  $[\xi] = 1.2$ ,  $D[\xi] = 0.64$ . Найти вероятность того, что  $\xi < 1.6$ .

2. Непрерывное случайное напряжение, принимающее значения от -10 до +10 В, необходимо оцифровать в двоичное число. Каким должен быть уровень дискретизации, чтобы среднеквадратичная ошибка не превышала 0,01 величины максимального напряжения?

2. Известно, что расстояние от центра мишени до точки попадания (R) подчиняется распределению Рэлея:

$$f_R(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

вопрос 1

При стрельбе из лазерной пушки по круглой мишени диаметром 2 м обнаружено, что в одном из десяти случаев поражения мишени не было.

а) Определить вероятность того, что при попадании разброс относительно центра мишени не превысит 0,3 м.

б) Определить вероятность того, что при промахе луч пройдет не далее 0,5 м от края мишени.

вопрос 2

Стрелок попадает в мишень диаметром 20 см с вероятностью 0,9. Каково матожидание отклонения точки попадания от центра мишени при данных условиях ?

Случайные векторы

Двумерная плотность вероятности случайного вектора  $\xi, \eta$  имеет вид

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} A \cdot \exp\{-(3x + 4y)\}, & x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ 0, & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Определить:

а) значение А;

б) математическое ожидание СВ  $\xi \cdot \eta$ .

2. Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  равномерно распределен в квадрате со стороной  $a$  и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти плотности распределения составляющих. Будут ли эти величины независимы? Некоррелированы?

3. Задана двумерная СВ  $(\xi, \eta)$ :

$\eta \backslash \xi$	3	6
10	0.25	0.10
14	0.15	0.05
18	0.32	0.13

Найти условный закон распределения  $\xi$  при  $\eta = 10$  и условное матожидание.

### Функции СВ и векторов

2. Пассажир каждое утро ездит в город восьмичасовым утренним поездом. Время прибытия пассажира на станцию есть равномерно распределенная на интервале от 7:55 до 8:05 СВ. Время отхода поезда также СВ, равномерно распределенная в интервале от 8:00 до 8:10.

Найти плотность вероятности СВ - величины интервала времени между моментами прибытия пассажира на станцию и отправления поезда.

Определить вероятность того, что пассажир успеет сесть на поезд.

2. До нужного места Вам надо будет ехать с пересадкой на двух автобусах. Известно что первый идет с интервалом 5 мин, а второй - 3 мин, но расписание неизвестно. Свою часть пути каждый автобус проходит строго за 20 мин. Какова вероятность того, что время в дороге не

превысит 45 мин?

2. Через резистор с сопротивлением  $3 \text{ Ом}$  протекает случайный нормально распределенный ток с нулевым матожиданием и дисперсией  $4A^2$ . Определить закон распределения рассеиваемой мощности, ее матожидание и дисперсию.

2. К резистору с  $R = 40 \text{ Ом}$  приложено напряжение, значение которого случайно и имеет нормальное распределение с  $m = 0\text{В}$  и  $\sigma = 1 \text{ В}$ . Найти вероятность того, что мощность, рассеиваемая на резисторе лежит в диапазоне от  $9,9$  до  $10,1 \text{ Вт}$ .

3. Средняя продолжительность работы лампы накаливания  $750$  час. Из одной партии взяты две лампочки (одна в запас). Какова вероятность того, что через  $750$  часов Вам еще не понадобится идти в магазин за новой лампой?

2. Нормально распределенное случайное напряжение  $m = 0\text{В}$  и  $\sigma = 1\text{В}$  приложено к цепи из последовательно включенного диода и  $10\text{-омного}$  резистора. Найти матожидание силы тока.

2. Амплитудная характеристика ограничителя имеет вид

$$U = \begin{cases} -B, & U \leq -A, \\ B \cdot U/A, & -A < U \leq A, \\ B, & U > A. \end{cases}$$

- здесь  $A, B$  - постоянные.

а) Написать общее выражение для плотности вероятности сигнала на выходе, если на входе нормально распределенный сигнал  $N(a, \sigma)$ .

б) Найти распределение сигнала на выходе, если на входе равномерно распределенный на  $(-2, 8)$  сигнал и  $A = B = 5$ .

3. СВ  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют одно и то же распределение с плотностью

$$f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp -\lambda \cdot x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность  $f_{\xi+\eta}(z)$  и построить график.

3. СВ  $\xi$  равномерно распределена на отрезке  $[-1, 2]$ . Найти плотность вероятности СВ  $\xi^2$ . Построить график  $f_{\xi^2}$ .

3. Плотность вероятности случайного вектора  $(\xi, \eta)$  имеет вид

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} k \cdot (x^2 + y^2), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & x < 0, \quad x > 1, \quad y < 0, \quad y > 1. \end{cases}$$

Являются ли его составляющие независимыми? Найти  $K_{\xi\eta}$ .

3. В партии резисторов сопротивление можно считать СВ, равномерно распределенной на отрезке  $[100,120]$  (Ом). Два наугад взятых резистора соединены последовательно.

Найти:

- а) наиболее вероятное значение сопротивления этой цепи;
- б) максимальное возможное значение сопротивления;
- в) вероятность того, что сопротивление превысит 220 Ом.

Случайный процесс задан аналитическим выражением  $x_i(t) = V + Ut^2$ , где  $V$  и  $U$  — независимые случайные величины.  $V$  — равномерно распределена на отрезке  $[0, 1]$ , а  $U$  — имеет показательное распределение с параметром  $\lambda = 1$ . Найти его матожидание  $m_\xi(t)$  и одномерную плотность вероятности.

Случайный процесс задан аналитическим выражением  $x_i(t) = V + Ut^2$ , где  $V$  и  $U$  — независимые случайные величины, имеющие нормированное нормальное распределение  $N(0, 1)$ . Найти матожидание  $m_\xi(t)$  и одномерную плотность вероятности  $\xi(t)$ .

#### Элементы матстатистики

3. Распределение СВ в выборке определяется следующим интервальным рядом распределения:

3.0-3.6	3.6-4.2	4.2-4.8	4.8-5.4	5.4-6.0	6.0-6.6	6.6-7.2
2	8	35	43	22	15	5

Построить гистограмму и проверить гипотезу о нормальном законе распределения при уровне значимости  $\alpha = 0.01$ .

3. Методика определения содержания железа имеет с к о 0,12%. Найти доверительный интервал для содержания железа в сплаве с надежностью 0.95, если по результатам 6 анализов среднее содержание 32,56%.

3. Произведено пять независимых равноточных измерений величины заряда электрона. Получены следующие результаты (Кл):

$$1,594 \cdot 10^{-19}; 1,597 \cdot 10^{-19}; 1,593 \cdot 10^{-19}; 1,590 \cdot 10^{-19}; 1,591 \cdot 10^{-19}.$$

Оценить величину заряда и найти доверительный интервал с надежностью ( доверительной вероятностью ) 0.99 . Какие дополнительные соображения Вы использовали для решения задачи ?

3. Представлены результаты измерения СВ  $\xi$ , равной отношению предела текучести стали к пределу прочности, и СВ  $\eta$  - процентному содержанию углерода:

$\xi \backslash \eta$	0.5	0.6	0.7	0.8
0.5	0	2	0	8
0.6	0	4	2	9
0.7	2	12	3	1
0.8	21	14	0	0
0.9	1	0	0	0

Построить уравнение прямой линии регрессии и сосчитать выборочный коэффициент корреляции.

2. При измерении толщины пластины получены следующие результаты: 2,15; 2,18; 2,14; 2,16; 2,17. Оценить доверительный интервал для толщины с надежностью 0,95.

2. Для выборки  $\{1,2,3,2,1,4,5,3,2,2,4,6,2,2,4,3,6,4,1,4\}$  построить выборочный ряд распределения, полигон частот. Найти  $\bar{x}_в$  и  $D_в$ .

2. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выборка из генеральной совокупности, причем матожидание равно  $m$ , а дисперсия  $\sigma^2$ . Показать, что  $\bar{x}_в$  удовлетворяет требованиям, предъявляемым к точечной оценке.

(Справка: неравенство Чебышева ( $| \bar{x}_в - m_x | > \epsilon < \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$ )).

3. Задан статистический ряд

x	9 - 10	10-11	11-12	12-13	13-14
$m_i$	18	52	48	34	28

Построить гистограмму. Оценить доверительный интервал для  $[\xi]$  с надежностью 0.8.

3. В ходе исследований зависимости пробивного напряжения конденсаторов ( $x_i$ ) от температуры окружающей среды ( $y_i$ ) были получены следующие результаты:

i	$x_i, C^0$	$y_i, В$	i	$x_i, C^0$	$y_i, В$
1	11	420	6	62	290
2	22	410	7	71	300
3	31	360	8	78	270
4	39	360	9	90	210
5	52	340	10	105	200

Построить прямую линию регрессии и вычислить выборочное значение коэффициента корреляции.

3. В документации на катушки индуктивности указано сопротивление 100 Ом. Для 9 катушек было получено среднее 115 Ом и  $s_{ко}$  20 Ом. Попадают ли 100 Ом в 95% доверительный интервал? (в 90%)

3. Оценка величины сопротивления для большой партии однотипных резисторов, проведенная по результатам измерения 100 случайно отобранных экземпляров, равна  $\bar{x}_в = 10$  кОм.

а) Считая, что с.к.о. измерения известно:  $\sigma = 1$  кОм, найти вероятность того, что резисторы имеют сопротивление в пределах  $10 \pm 0.1$  кОм.

б) Сколько измерений надо произвести, чтобы с вероятностью 0.95 можно было утверждать, что сопротивление для всей партии лежит в

интервале  $10 \pm 0.1$  кОм?

3. Из большой партии транзисторов одного типа были случайным образом отобраны и проверены 100 штук. У 36 транзисторов коэффициент усиления оказался меньше 10. Найти 95% доверительный интервал для доли таких транзисторов в партии.

3. Результаты 10 измерений емкости конденсатора дали такие отклонения от номинала (пкФ): 5.4; -13.9; -11; 7.2; -15.6; 29.2; 1.4; -0.3; 6.6; -9.9. Найти 90% доверительный интервал для дисперсии и ско.

3. Распределение СВ в выборке определяется следующим интервальным рядом распределения:

2.9-3.9	3.9-4.9	4.9-5.9	5.9-6.9	6.9-7.9
5	15	23	19	62

Построить гистограмму и проверить гипотезу о нормальном законе распределения при уровне значимости  $\alpha = 0.1$ .

3. Распределение СВ отклонение напряжения от номинала (мВ) определяется следующим интервальным рядом распределения:

0.0-0.2	0.2-0.4	0.4-0.6	0.6-0.8	0.8-1.0	1.0-1.2	1.2-1.4	1.4-1.6	
2	9	15	29	35	32	19	8	3

Построить гистограмму и проверить гипотезу о нормальном законе распределения при уровне значимости  $\alpha = 0.5$ .