1.. Тема1. Случайные события

1.1.. Стохастичность нашего мира

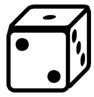
Окружающий нас мир многообразен и сложен. Человечество занимается его изучением столько времени, сколько оно существует. Основой наших знаний всегда было наблюдение, выделение каких-то повторяющихся при одних и тех же условиях событий. Поэтому одной из древнейших наук является астрономия. Сначала люди замечали и описывали то, что они наблюдали – смену дня и ночи, времен года, а затем пытались дать этому объяснение. Не всегда то, что видит наблюдатель соответствует действительному положению вещей. Так суточное вращение Земли (а мы видим движение Солнца по небосводу!) далеко не сразу стало научным фактом, причем фактом общеизвестным. Классическая механика стала настоящей наукой благодаря гению Ньютона, сформулировавшему свои знаменитые три закона, причем отнюдь не очевидные.

Жизненный опыт, скажем, говорит о том, что двигать, перемещать предметы можно только прикладывая определенные усилия. И лишь анализ многочисленных наблюдений за движением реальных тел позволил сформулировать первый закон механики, по которому движение с постоянной скоростью не требует никакого воздействия. Современная механика — это наука, позволяющая не только понимать закономерности движения физических тел, но и предсказывать на многие годы и с высокой точностью траектории планет и искусственных космических аппаратов.

На этом примере мы видим, что научный подход к изучению некоего природного явления заключается в выделении наиболее существенных его свойств в пренебрежении менее важными.

Практически все современные исследования природы проводятся в виде *экспериментов*, т. е. изучаемый объект или явление наблюдается в специально организованных условиях. Закономерность будет считаться имеющей место, если при одних и тех же условиях будет регистрироваться один и то же результат.

Познание человеком окружающего его мира началось с обнаружения эмпирических закономерностей — если мы наблюдаем некоторое событие А, то через некоторое время произойдет событие В. В дальнейшем на основании такие наблюдений сформировалось такие естественные науки как астрономия, физика, химия. В свою очередь развитие этих наук предоставило математике различные абстрактные понятия и модели, а также и основной исследовательский метод — логическое рассуждение. В классической логике применяется четкая цепочка: **причина** $\Rightarrow$ **следствие**.

Чем лучше ученые понимали и постигали закономерности окружающего мира, тем большее удивление вызывали такие ситуации, в которых при идентичных начальных условиях результат предсказать было совершенно невозможно. Археологические исследования показывают, что предмет , который мы теперь называем *игральной костью*, был известен многим народам тысячи лет назад. Небольших размеров кубик из очень легкого материала и со скругленными ребрами очень неустойчив. Если его подбросить, то начальное положение быстро «забывается» — уверенно предсказать какая именно из граней окажется верхней после остановки движения невозможно. Также непредсказуем результат падения специальным образом подброшенной монетки — так даже в футболе распределение ворот между командами осуществляется.

Одно из основных понятий теории вероятностей (сокр. ТВ) — *случайное событие*. Во избежание недоразумений будем в дальнейшем различать употребление этого словосочетания в *широком смысле*, т. е. применительно к *реальным событиям*, событиям, которые можно наблюдать, которые происходят с реальными объектами окружающего нас мира, и в *узком смысле* — как абстрактного понятия математической теории. Случайность реального события подразумевает некоторую неопределенность результата наблюдения при одних и тех же начальных условиях. Как иногда говорят, случайное событие может произойти или не произойти. Разберемся с этим понятием подробнее, а затем перейдем и к математической терминологии.

1.2.. Пространство элементарных событий

Начала ТВ связаны с изучением закономерностей азартных игр: кости, карточные игры, рулетка, различные лотереи. У всех азартных игр имеется общее: первый этап (выбрасывание костей из стаканчика, тасование и сдача карт, запуск колеса рулетки...), который единообразно повторяется много раз, и второй этап – подсчет выпавших на костях очков, состав полученного при сдаче набора карт, место на рулеточном колесе, на котором остановился шарик... Весь интерес как раз в том, что предсказать заранее, что получится на втором этапе невозможно. Как говорится, результат случаен.

Введем абстрактную модель, объединяющую основные характерные особенности азартных игр — *эксперимент со случайным исходом (сокр. ЭСИ)*. На рис. 1 представлена схема этой модели, первая часть — *испытание*. Она отображает условия, правила проведения игры. Вторая — содержит все возможные *исходы*, состав ее также отчасти определяется правилами игры. Если игрок хочет разобраться с правилами подробнее, попытаться выявить какие-то закономерности, то ему придется уточнить что именно лучше считать исходом.

Эксперимент может проводить сам наблюдатель, выбрасывая, например, игральный кубик. Может быть и гораздо более сложный механизм организации эксперимента, такой как "Спортлото" или другая лотерея. Наконец, это может быть и некий естественный процесс, происходящий безо всякого вмешательства человека. Отметим сразу элемент идеализации, имеющий место уже на начальном этапе изучения реального случайного явления. Мы не пытаемся отслеживать временну́ю эволюцию объекта, т. е. изменение его состояния со временем, считаем, что оно, это изменение, происходит мгновенно.

Время лишь выделяет два этапа эксперимента, естественным образом упорядочивая их. Это *испытание*, включающее в себя исходное состояние объекта и воздействие, и результат, называемый *исходом* (см.рис. 1).

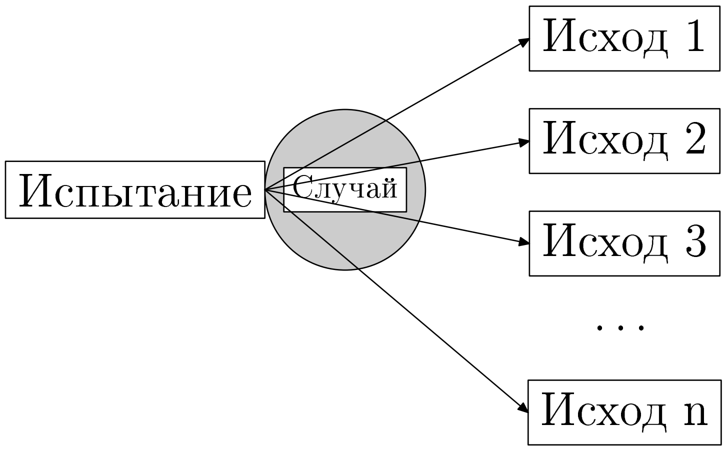


Рис. 1. Схема эксперимента со случайным исходом

Возможность *многократного*, хотя бы в принципе, повторения условий нашего эксперимента очень существенна и будет подробно обсуждаться ниже. Такое реальное событие называют **массовым**. Примеров случайных событий можно привести очень много. Случайным является результат выбрасывания монетки, игрального кубика, розыгрыша лотереи. Хотя результат футбольного матча также нельзя предсказать заранее, но для конкретных команд данное событие никак нельзя считать массовым и применять к нему все последующие результаты нельзя.

Перейдем теперь к математическому пониманию термина ***случайное событие***. Предполагаем, что можно заранее перечислить, описать все возможные результаты опыта или *исходы*. Что именно подразумевать под *исходом* из описания нашего эксперимента не следует и должно быть специально оговорено, чтобы избежать недоразумений. Особенно надо помнить об этом при решении задач.

Вместо "исход" часто говорят *элементарное событие*, имея в виду, что более **детальная** фиксация результата эксперимента не производится. Естественно, что реально произойти может только одно событие из этого "списка" (говорят, что такие события *несовместны*). Форма монетки такова, что на твердую поверхность она может упасть гербом, Г, или цифрой, Ц, вверх. Эмпирический факт — невозможно предсказать какой стороной выпадет монетка. Под этим понимают невозможность каким-либо способом уверенно предсказывать результат выбрасывания. Это значит, что повторяя свое предсказание несколько раз вы будете угадывать примерно столько-же раз, сколько и ошибаться. Точно так же невозможно уверенно определить характеристики игральной карты, которая вынимается из тщательно перетасованной колоды. теория вероятности ничем не поможет вам в подобных ситуациях: ни определить сторону монетки, ни игральную карту. Но зато эта теория позволяет получать закономерности совершенно нового типа.Если не интересоваться координатами места падения, то получается два возможных исхода.

Если плотность небольшая (кость!), то этот кубик чрезвычайно верткий, он поворачивается при малейшем воздействии. Бросающему нет никакой возможности добиться того, чтобы кубик упал определенным заранее образом. Игральный кубик может выпасть любой из своих шести граней вверх, значит шесть исходов. Место падения на столе во внимание не принимается — так уж повелось, правила игры такие. Именно поэтому считаем возможными ровно шесть исходов по числу граней. В других примерах число возможных исходов будет иным. Бывают эксперименты, в которых затруднительно ограничить количество исходов, и его удобно считать бесконечным. Скажем, монетка выбрасывается до первого появления герба.

Итак, наличие более одного возможного исхода — вот в чем заключается "случайность" реального явления. Множество возможных исходов полностью содержит всю "индивидуальность" случайного явления и может рассматриваться как основа для его изучения. Результатом испытания будет наступление одного и только одного из исходов. Примеры показывают, что никаких разумных ограничений на свойства этого множества предложить нельзя, оно может быть совершенно произвольным. Конкретная природа составляющих его элементов для математики несущественна, они первичны и элементарны, подобно точкам в геометрии. Приведем теперь формальные определения.

Определение. Произвольное множество Ω назовем **пространством элементарных событий**, (сокр. ПЭС). Элементы ω этого множества будем называть *элементарными событиями* или *исходами.*

Свойства ПЭС

1. **Полнота.** В качестве исходов рассматриваются все существенные результаты ЭСИ. При решении прикладных задач очень важно выделить то, что существенно для понимания природы изучаемого явления, и не принимать во внимание несущественное, только затрудняющее решение задачи.
2. **Несовместность.** Формулировка того, что считать исходом данного ЭСИ, должна исключать одновременное наступление различных исходов. Результатом может быть *только один* исход.

Можно сформулировать условия, налагаемые на результат эксперимента так, что им будут удовлетворять несколько исходов. Скажем, в эксперименте с выбрасыванием кубика можно наблюдать событие "число выпавших очков четное". Такие события называют *сложными*, или просто событиями, без прилагательного, а математической моделью для них будет любое подмножество $A \subseteq \Omega$ элементов из Ω.

Определение. *Случайным событием* называют произвольное подмножество ПЭС Ω данного ЭСИ.

Ω содержит все возможные исходы, такое событие называют *достоверным событием.* Это математическая "тень модель реального события, которое обязательно произойдет в результате данного ЭСИ, обычно мы будем его обозначать через **U** или **Д**.

Невозможное событие — это событие, обозначаемое **V** или **Н**, не содержащее ни одного исхода.

Это название также достаточно удачное, поскольку соответствует реальному событию, которое не может произойти в условиях данного ЭСИ.

Нельзя, однако, забывать, что в ТВ мы имеем дело с моделью, а не реальным явлением. Составляя ПЭС, мы не учитывали несущественные по нашему мнению результаты эксперимента. А в реальности монетка может закатиться в щель, игральный кубик упадет со столика...

1.3.. Несколько примеров построения ПЭС

Решение задач по теории вероятностей, а они содержат как правило описание некоторых, если так можно выразиться, житейских ситуаций, начинается с моделирования, формализации этих ситуаций. Иначе говоря, необходимо выполнить построение *пространства элементарных событий.*

Для этого, во-первых, мы уславливаемся, что именно будем считать элементарным событием, исходом данного опыта, а во-вторых, описываем множество этих исходов. В рассмотренных ранее примерах с монеткой и кубиком все очевидно (вернее существует традиция). В других задачах построение ПЭС может быть сделано несколькими способами и заслуживает специального обсуждения.

Рассмотрим выбрасывание двух одинаковых монеток. Какое выбрать множество исходов? Трехэлементное {ГГ, ГЦ, ЦЦ} или четырехэлементное

{Г1Г2, Г1Ц2, Ц1Г2, Ц1Ц2}? С логической точки зрения оба варианта возможны. Мы же предпочитаем второй, поскольку он лучше отражает *природу* данного эксперимента, позволяет объяснить почему комбинация {ГЦ} выпадает чаще, чем {ГГ} или {ЦЦ}. Дело в том, что монетки, пусть даже совершенно новые, только из под пресса, в принципе различимы. Можно пометить монетки очень маленькой меткой или радиоактивным изотопом и это никак не повлияет на их движение во время полета. Далее, отметку можно проверить, а можно и не проверять. Это также на характер движения повлиять не может. Монетки "не знают" будем мы их различать или нет. Значит удобнее и при выборе модели фиксировать порядок символов Г и Ц, т.е. в качестве ПЭС выбрать {Г1Г2, Г1Ц2, Ц1Г2, Ц1Ц2}. Если еще добавить вполне естественное предположение о *равновозможности* исходов, (последнее означает отсутствие предпочтительности одного или нескольких из них перед остальными), то мы получаем очень даже подходящую модель. Комбинация {ГЦ} при бросании будет выпадать чаще, потому что это сложное событие, состоящее из двух элементарных — {Г1Ц2} и {Ц1Г2}. А вот если вместо монеток будут электроны, имеющие направление спина вверх или вниз (аналог герба и цифры), то в силу того, что микрочастицы в принципе неразличимы, более подходящей будет первая модель.

Аналогичные рассуждения можно провести еще для одного известного эксперимента по выбрасыванию трех одинаковых игральных костей. В литературе по ТВ с ним связывают следующую легенду. Некий игрок в кости обратился за разъяснениями к знаменитому Паскалю (в других книгах к Галилею или Гюйгенсу — в общем, к большому математическому "авторитету"). По мнению этого игрока сумма очков на трех костях должна одинаково часто принимать значения 11 и 12. Ведь каждое из этих чисел можно представить в виде суммы трех слагаемых шестью способами. Действительно,

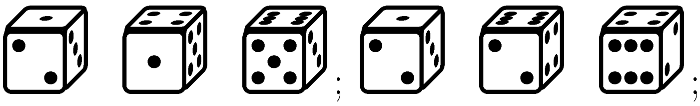
$$11 = 1 + 5 + 5 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4,$$

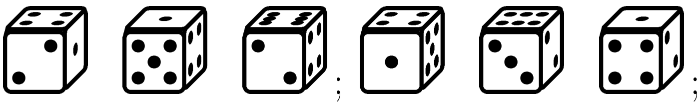
$$12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 4 + 5 = 3 + 3 + 6 = 4 + 4 + 4.$$

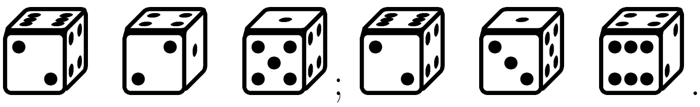
На практике же 11 выпадает чаще, чем 12 . Парадокс легко разрешим, если принять во внимание принципиальную различимость игральных костей. Ведь суть этого парадокса в несоответствии результата, предсказанного в рамках модели, и реально наблюдаемого. Игральные кости двигаются согласно законам классической механики как различимые макроскопические тела. Поэтому исходом надо считать *упорядоченный* набор трех чисел из $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда подсчет количества исходов, "благоприятствующих" событиям "сумма 11" или "сумма 12" надо проводить иначе. Комбинация $\{1 + 5 + 5\}$ — не элементарное событие и может реализоваться тремя способами:

$$1 + 5 + 5 = 5 + 1 + 5 = 5 + 5 + 1,$$

т.к. единичка может выпасть на любой из трех костей. Комбинация $\{1 + 4 + 6\}$ реализуется шестью способами

1-2 

3-4 

5-6 

и лишь $\{4 + 4 + 4\}$ есть исход. Попробуйте теперь подсчитать сами и Вы получите для 11 очков 27 исходов, а для 12 очков — 25. Полное число возможных исходов (число элементов ПЭС) будет $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Точно так же поступаем и при рассмотрении эксперимента с выбрасыванием 2х кубиков (см. рис. 2). Модель, адекватно учитывающая свойства реального эксперимента, содержит 36 исходов. В этом случае также различным значениям суммы очков будет соответствовать разное число исходов. Мы еще вернемся к этому эксперименту в лекции о случайных величинах.

Задача 1. [о встрече двоих] Двое уговорились встретиться на следующих условиях. Каждый появляется на месте встречи в произвольный момент времени от, скажем, 13 до 14 часов, ожидает другого не более 10 минут, затем уходит. Построить пространство элементарных событий (ПЭС).

Этой задаче можно придать не только детективно-шпионский оттенок. Можно говорить о приемном устройстве, которое обрабатывает полученный сигнал в течении некоторого промежутка времени. Если второй сигнал поступит пока устройство занято, то он не будет принят. Таким устройством является и телефонный узел, и банковский компьютер, принимающий переводы, и счетчик Гейгера, и многое другое. Аналогичная ситуация возникает в

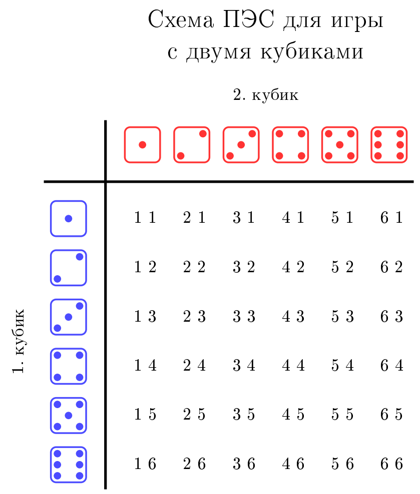


Рис. 2. Наглядное представление ПЭС для двух кубиков

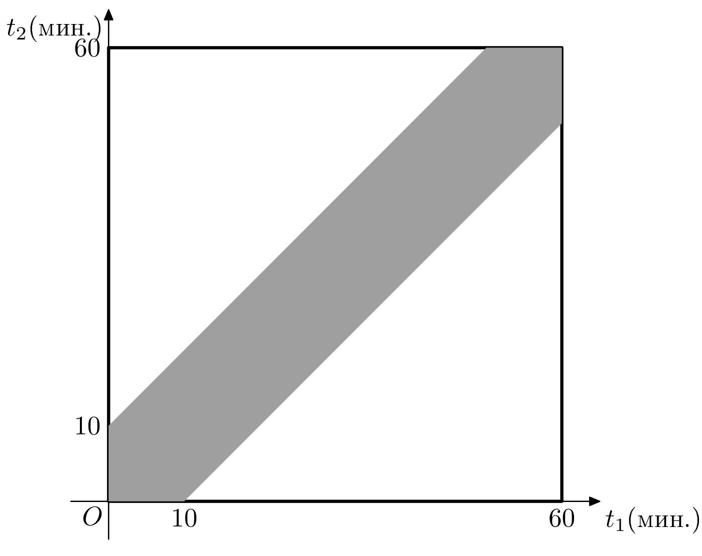


Рис. 3. ПСЭ для задачи о встрече

порту, если к причалу одновременно приходят два парохода. Разгрузка подошедшего первым занимает некоторое время, в течении которого второй будет ждать.

Решение. В качестве исхода будем фиксировать моменты прихода участников на место встречи (с бесконечной точностью — это уже часть нашей идеализации реальной задачи). Получаем множество упорядоченных пар чисел $\{t_1, t_2\}$, каждое из которых принимает любое значение из $[13; 14]$. Для простоты можно отсчитывать время в минутах от 13 часов. Геометрическим образом ПЭС будет квадрат.

Теперь построим событие A={двое встретились}. Условие встречи $|t_1 - t_2| \leq 10$. Нетрудно сообразить, что это будет своеобразная шестиугольная "полоска" вдоль диагонали квадрата.

1.4.. Операции над событиями. Алгебра событий

На множестве случайных событий, связанных с данным ЭСИ можно определить формальные операции.

События A_1 и A_2 называются *равными*, они состоят из одних и тех же исходов, то есть при теоретико-множественной интерпретации равенство событий — это равенство множеств.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B)\,.$$

Установить равенство значит убедиться, что все исходы события A_1 входят в A_2, а исходы A_2 — в A_1. Заметим, что в реальной жизни установить, что событие, являющееся страховым случаем по договору страхования, и случившаяся с вами неприятность совпадают (равны) может потребовать значительных усилий.

Определение. **Суммой событий** A и B называется событие , состоящее из исходов, принадлежащих хотя бы одному из суммируемых событий.

Обозначение $A + B = C$. Сумма событий может быть интерпретирована как реальное событие, состоящее в наступлении **хотя бы одного** из суммируемых событий.

Определение. **Произведением** событий A и B называется событие C, состоящее из исходов, принадлежащих обоим перемножаемым событиям. В стандартных обозначениях теории множеств имеем $AB = A \cap B$.

Обозначение $A \cdot B = C$. Произведение можно интерпретировать как реальное событие, состоящее в одновременном наступлении обоих перемножаемых

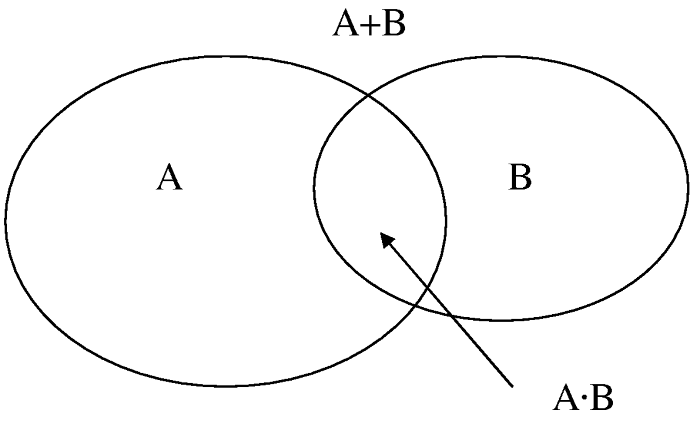


Рис. 4. Сумма и произведение двух событий

событий. При проектировании и программировании систем управления, при составлении финансовых договоров и контрактов, заключении соглашений очень важно правильно сопоставлять реальные события и их математические модели.

Определение. Событием, **противоположным** к событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее из всех таких исходов $\omega \in \Omega$, которые не входят в данное событие. $\omega \in \Omega \setminus A$ (так называемое **дополнение** множества A до множества Ω всех элементарных исходов).

Операции можно выполнять многократно, при этом имеют место следующие свойства.

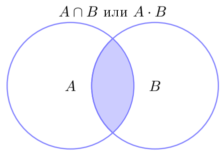
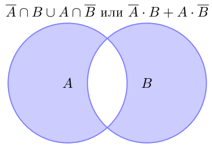
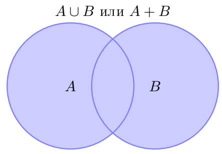
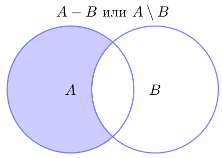
Свойства операций

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
4. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;
5. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Определение. События A и B называются **несовместными**, если $AB = \mathbf{V}$, то есть произведение событий A и B есть невозможное событие. События $A, B, \ldots$ (список может быть бесконечным) называются **попарно несовместными**, если любые два различных события из этого списка несовместны.

Множество событий $\mathbf{A}$ называют *алгеброй событий*, если выполняются три условия: а) $\Omega \subset \mathbf{A}$; б) если $A \in \mathbf{A}$, то $\overline{A} \in \mathbf{A}$; в) если $A, B \in \mathbf{A}$, то и $A + B \in \mathbf{A}$. Эта более сложная конструкция, чем ПЭС понадобится в дальнейшем для строгого определения вероятности.

Наглядное изображение операций над событиями.

Словесное описание	Символическая запись	Диаграмма Венна
A и B вместе	$A \cdot B$	
A или B, но не вместе	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$	
Хотя бы одно из двух	$A + B$	
A, но не B	$A \setminus B$	
B, но не A	$B - A = B \setminus A$