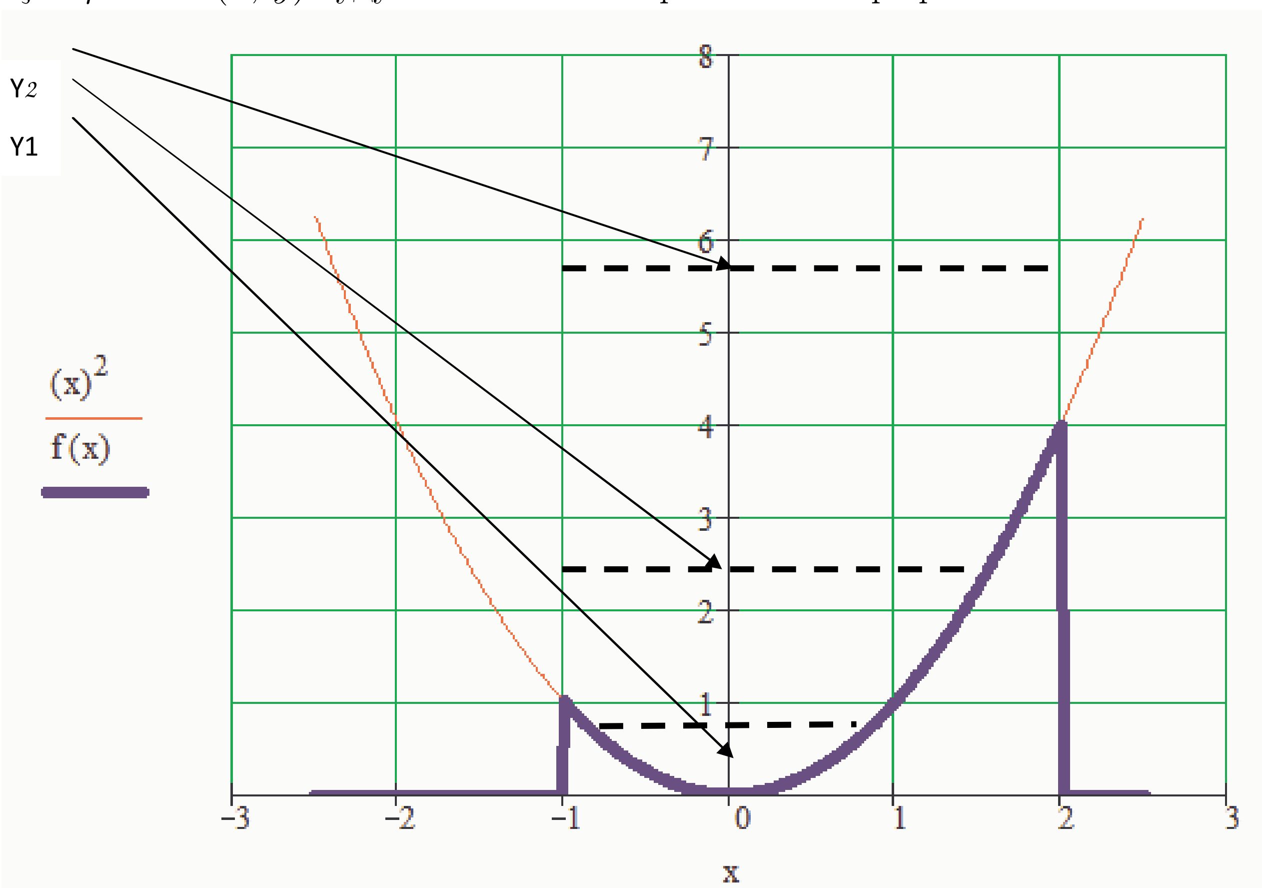
Пример 0.1 *Найти функцию распределения СВ η, $F_\eta(x)$ и плотность вероятности СВ ξ^2, если ξ распределена равномерно на отрезке* $[-1,\, 2]$.

Решение

Постарайтесь понять, что отображение φ множества значений СВ ξ на множество значений СВ η изменяет распределение вероятностей. Если $\varphi : X \mapsto Y$, то вероятность того, что $\eta \in Y$) будет равна вероятности того, что СВ ξ принимает значения из множества прообразов Y, т. е. $X = \{x|\varphi(x) = y \in Y\}$.

Решение задачи существенно облегчается при использовании графика функции $\varphi(x)$. Заметим, что при измерении пары СВ ξ и η точки $(x,\, y)$ будут ложиться как раз на этот график.



Функция распределения ищется с помощью определяющего соотношения

$$F_\eta(y) = P\left(\eta < y\right).$$

Очевидно, СВ η не может принимать отрицательных значений, $F_\eta(y) = 0,\ y \le 0$.

Рассмотрим теперь несколько значений y_i, существенно меняющих выражение для функции распределения. Они отмечены на рисунке.

Проследите как меняется множество прообразов X_i множества значений СВ $\eta = \xi^2$, определяемых условием $(\eta < y)$, при возрастании y. С геометрической точки зрения — множество значений абсцисс точек, ординаты которых принадлежат отрезкам $[0,\ y_i]$.

Если $\varphi : X_i \mapsto Y_i$, то $Y_i = [0,\ y_i]$, а $X_1 = [-\sqrt{y}_1,\ \sqrt{y}_1];\ X_2 = [-1,\ \sqrt{y}_2]$ и $X_3 = [-1,\ 4]$. Это соответствует $0 < y_1 \le 1$,
$1 < y_2 \le 4$ и $y_3 > 4$.

Соответствующие отрезки изображены на рисунке пунктиром.

Получаем "склееную" функцию:

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \left(\dfrac{1}{3} \cdot \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1\, dt\right) & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ \left(\dfrac{1}{3} \cdot \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{x}} 1\, dt\right) & \text{if } 1 < x \le 4 \\ 1 & \text{if } x > 4 \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:

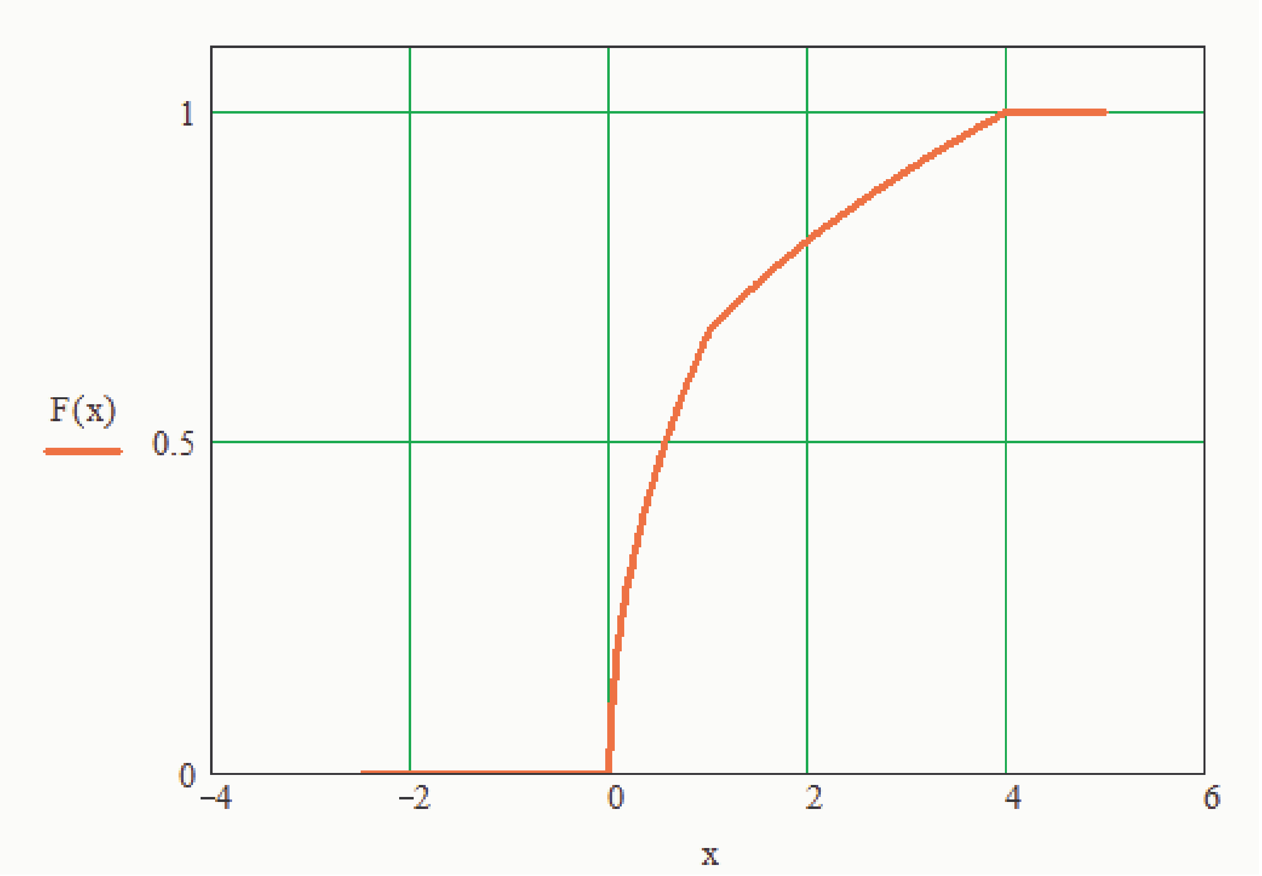
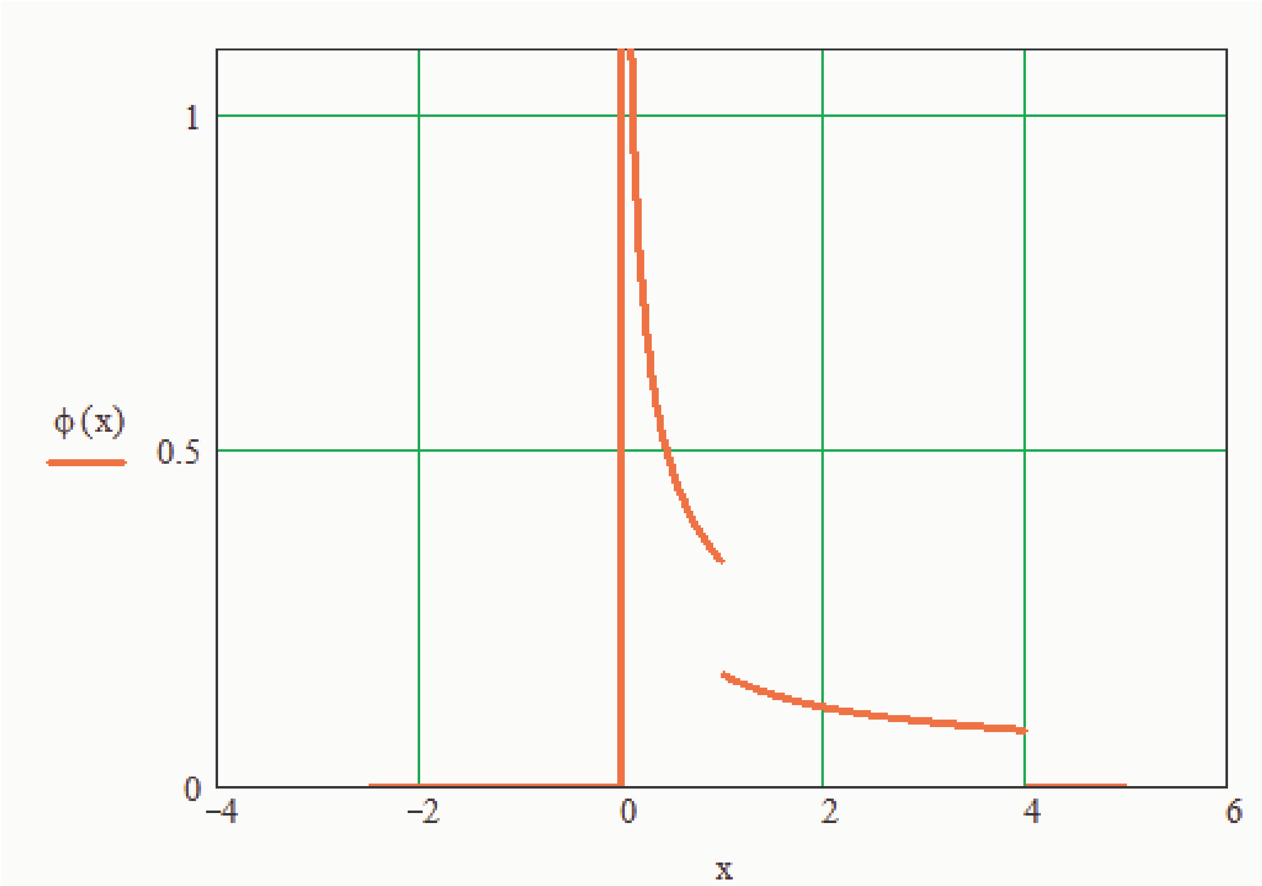


График плотности вероятности



Заметим, что плотность вероятности неограниченно возрастает при $y \to 0$. Это обстоятельство можно интерпретировать примерно так. Аргумент ξ имеет равномерное распределение, т. е. вероятность попадания в отрезки одинаковой длины Δx одна и та же $p\Delta x$. Отрезок $[x_0,\, x_0 + \Delta x]$ отображается в отрезок $[x_0^2,\, (x_0 + \Delta x)^2]$, и плотность вероятности (вероятность, деленная на длину) $\dfrac{p\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{p}{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2} \to \infty$ при $x_0 \to 0$.

4.07.09 А.Л.Крохин